

# **14. PUSH-DOWN AUTOMATA**

## **14. *Push Down Automata (PDA)***

**Merupakan mesin otomata dari bahasa bebas konteks.**

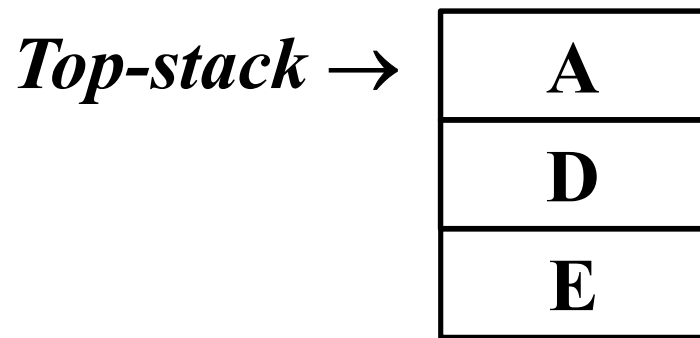
**Perbedaan PDA dengan Otomata Hingga terletak pada kemampuan memori. Otomata hingga mempunyai memori yang terbatas, sedangkan PDA mempunyai memori yang tidak terbatas, berupa *stack*.**

***Stack* adalah kumpulan dari elemen-elemen sejenis dengan sifat penambahan elemen dan pengambilan elemen melalui suatu tempat yang disebut *top of stack*.**

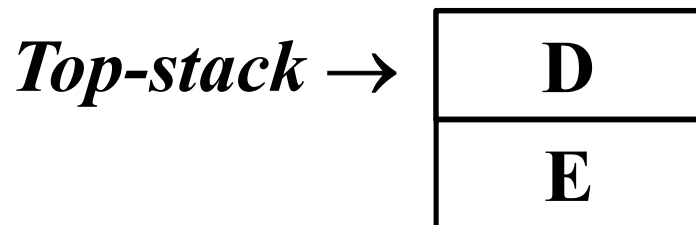
Aturan pengisian atau pengeluaran elemen *stack* menganut sistem LIFO (*Last In First Out*).

Pengambilan elemen dari *stack* dikenal dengan istilah *pop*. Sedangkan memasukkan elemen ke dalam *stack* dikenal dengan istilah *push*.

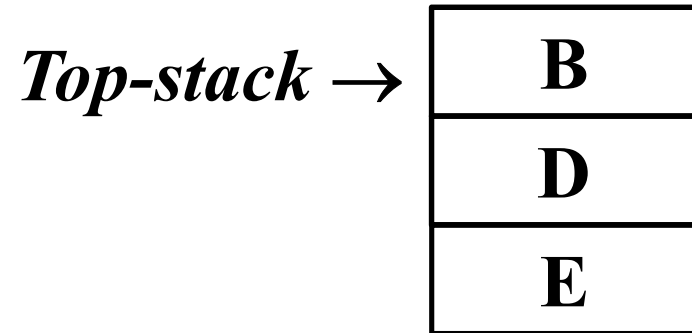
Contoh sebuah *stack*



Bila dilakukan operasi *pop*, maka kondisi *stack* menjadi:



**Bila dilakukan operasi *push* B, maka kondisi *stack* menjadi:**



**Sebuah PDA dinyatakan dalam 7 tupel:**

**$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, S, F, Z)$**

**$Q =$  himpunan *state***

**$\Sigma =$  himpunan simbol input**

**$\Gamma =$  simbol-simbol tumpukan / *stack***

**$\Delta =$  fungsi transisi**

**$S =$  *state* awal,  $S \in Q$**

**$F =$  himpunan *final state*,  $F \subseteq Q$**

**$Z =$  simbol awal tumpukan / *top stack*,  $Z \in \Gamma$**

**Dari komponen diatas dapat disimpulkan bahwa:**

- Definisi untuk  $Q, \Sigma, S, F$  sama dengan yang ada pada otomata hingga.**
- Tupel baru adalah  $\Gamma, Z$  yang berhubungan dengan *stack*.**
- $\Delta$  memiliki kemiripan dengan  $\delta$  pada otomata hingga dengan beberapa perbedaan.**

**PDA dapat dianggap sebagai otomata hingga yang dilengkapi dengan *stack*.**

**Sebuah PDA yang menerima *input*, selain bisa berpindah *state* juga bisa melakukan operasi pada *stack*.**

**Kondisi atau konfigurasi PDA pada suatu saat dinyatakan dengan *state* dan *stack*.**

**Jenis transisi pada PDA;**

- 1. Membaca simbol *input***
- 2. Tanpa membaca simbol *input*.**

## **1. Membaca simbol input**

**Pada PDA yang membaca simbol input, terdapat sejumlah pilihan yang mungkin, bergantung pada simbol *input*, simbol pada *top-stack*, dan *state*.**

**Setiap pilihan terdiri dari *state* berikutnya dan simbol-simbol (bisa satu, beberapa, atau kosong) untuk mengganti simbol pada *top-stack*.**

**Penggantian simbol pada *top-stack* bisa berupa *push*, untuk satu atau beberapa simbol, atau berupa *pop* untuk simbol kosong.**

**Setelah membuat pilihan, kemudian PDA membaca simbol *input* berikutnya.**

## **2. Tanpa membaca simbol input**

**Jenis transisi tanpa membaca input adalah transisi yang dilakukan tanpa membaca *input* atau  $\epsilon$ .**

**Transisi ini memungkinkan PDA memanipulasi isi *stack* atau berpindah *state* tanpa membaca *input*.**

### **Jenis-jenis PDA:**

- 1. PDA *null stack*, yaitu PDA yang melakukan penerimaan *input* dengan *stack* kosong.**
- 2. PDA *final state*, yaitu PDA yang melakukan penerimaan *input* yang pilihan transisinya menyebabkan PDA mencapai *final state*.**



## Contoh 14.1

### Sebuah PDA

$$Q = \{q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{A, B, Z\}$$

$$S = q_1$$

$$Z = Z$$

$$F = \{q_2\}$$

**PDA tersebut memiliki fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

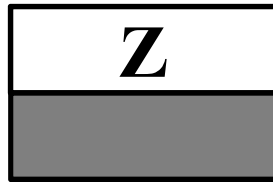
**Kita bisa membaca fungsi transisi tsb. sebagai berikut.**

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

**Mesin dengan konfigurasi:**

*State*  $q_1$  dan *top-stack*  $Z$

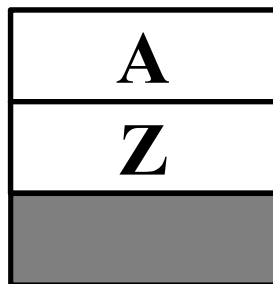
membaca *input* 'a'



**Konfigurasi menjadi:**

*State*  $q_1$ , *push* A ke *stack*,

A menjadi *top-stack*



**Fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \epsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

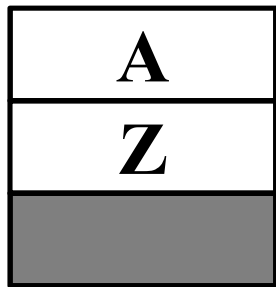
$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

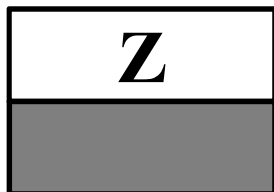
Mesin dengan konfigurasi:

*State*  $q_1$  dan *top-stack* A  
membaca *input* 'b'



Konfigurasi menjadi:

*State*  $q_1$ , *pop* A dari *stack*,  
elemen di bawah A  
menjadi *top-stack*



Fungsi transisi:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

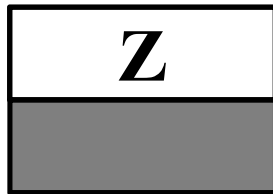
$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

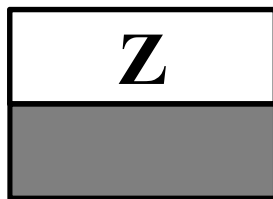
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

**Mesin dengan konfigurasi:**  
*State*  $q_1$  dan *top-stack*  $Z$   
tanpa membaca *input*.



**Konfigurasi menjadi:**  
*State*  $q_2$ , *stack* tidak berubah



**Fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

## Contoh 14.2

### Sebuah PDA

$$Q = \{q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{A, B, Z\}$$

$$S = q_1$$

$$Z = Z$$

$$F = \{q_2\}$$

PDA tersebut memiliki fungsi transisi:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

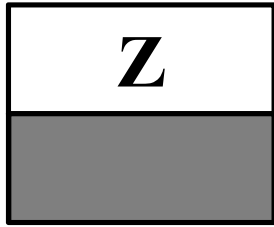
$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

Tentukan apakah PDA diatas dapat menerima *string* 'abba'

**Penyelesaian:**

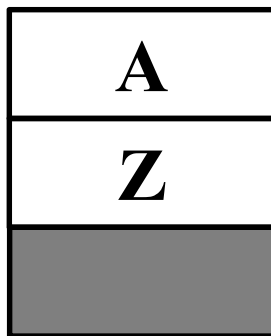


1. **Konfigurasi awal mesin:**  
**state  $q_1$  , *top-stack Z*,**  
**membaca input 'a'.**

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
***state  $q_1$  dan *push A****



**Fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

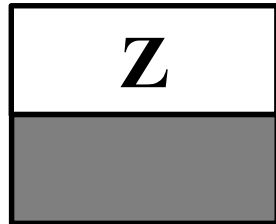
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

## 2. Membaca *input* 'b'.

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:  
*state*  $q_1$  dan *top-stack* di *pop*



Fungsi transisi:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

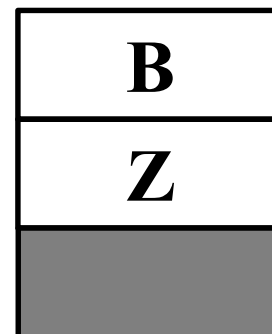
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

## 3. Membaca *input* 'b'.

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:  
*state*  $q_1$  dan B di *push*

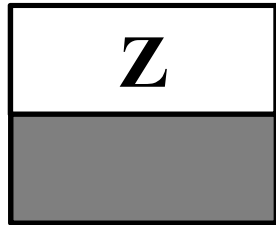


#### 4. Membaca *input* 'a'.

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi: *state*  $q_1$  dan *top-stack* di *pop*



Fungsi transisi:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

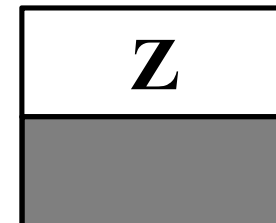
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

#### 5. Semua input sudah selesai dibaca.

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi: *state*  $q_2$   
*State*  $q_2$  berada dalam F (*final state*),  
maka 'abba' diterima oleh PDA





## Contoh 14.3

### Sebuah PDA

$$Q = \{q_1, q_2\} ; \Sigma = \{0, 1, 2\} ; \Gamma = \{Z, B, G\} ;$$
$$S = \{q_1, q_2\} ; Z = Z ; F = \emptyset$$

**PDA tersebut memiliki fungsi transisi:**

$$\begin{array}{ll} \Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\} & \Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} & \Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} & \Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\} \\ \Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\} & \Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\} \\ \Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\} & \Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\} \\ \Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\} & \Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \end{array}$$

**Tentukan apakah PDA diatas dapat menerima string '020'**

**Penyelesaian:**

Z
---

**1. Konfigurasi awal mesin:**

*state*  $q_1$  , *top-stack* Z,  
menerima input '0'.

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**

*state*  $q_1$  dan *push* B

B
Z

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

## 2. Membaca input '2'

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:  
*state*  $q_2$  dan *stack* tetap

<b>B</b>
<b>Z</b>

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

### 3. Membaca input '0'

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan B di *pop*



$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

#### 4. Tanpa membaca input ( $\epsilon$ )

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, \epsilon, Z) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:  
*state*  $q_2$  dan  $Z$  di *pop*

*Stack* kosong



Karena *string* '020' telah selesai dibaca dan berakhir pada *stack* kosong, maka PDA dapat menerima *string* '020'.

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \epsilon, Z) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \epsilon)\}$$