

Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -  
Move

**Dan Reduksi dalam State**

Pertemuan 4

Mahasiswa mampu menggunakan dan menerapkan tahapan mesin Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -Move

# MATERI

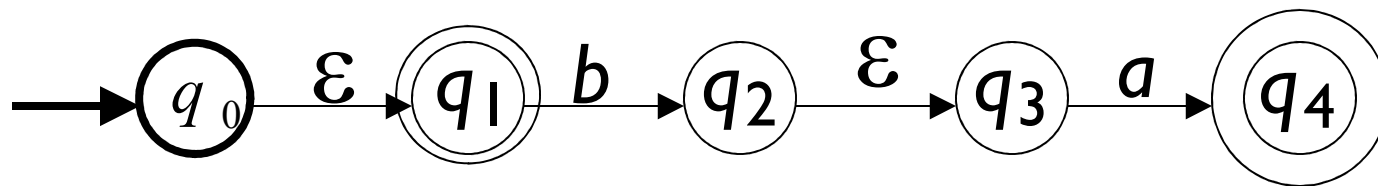
- Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -Move
- $\epsilon$ -Closure untuk suatu Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -Move
- Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

# Non Deterministic Finite Automata dengan $\epsilon$ -move

- NFA dengan  $\epsilon$ -move (transisi  $\epsilon$ ), diperbolehkan merubah state tanpa membaca input.
- Disebut dengan  $\epsilon$ -move karena tidak bergantung pada suatu input ketika melakukan transisi.
- Kegunaan  $\epsilon$ -move adalah untuk memudahkan mengkombinasikan finite state automata.

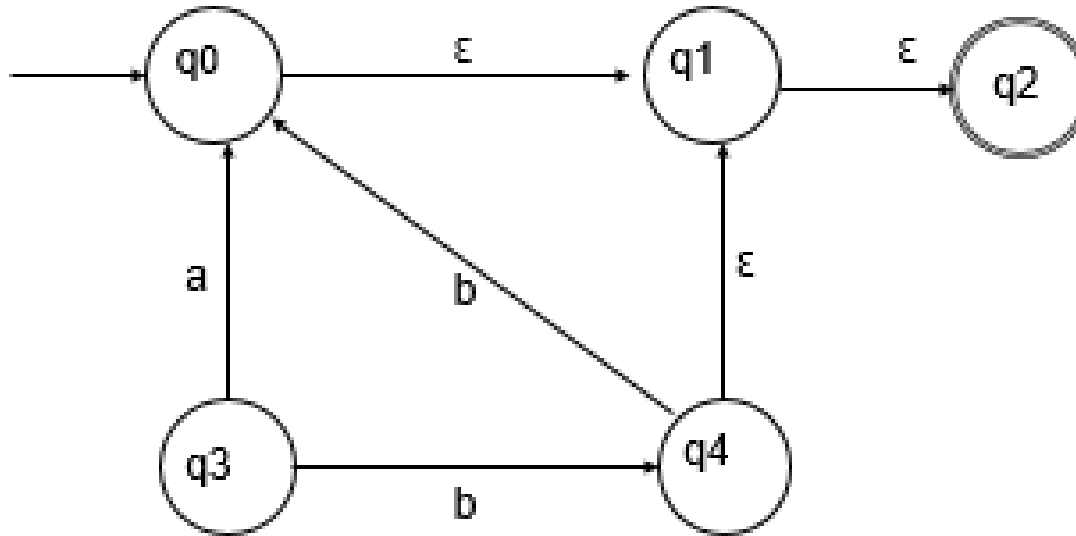
CONTOH

## NFA dengan $\varepsilon$ - Move



Penjelasan : dari  $q_2$  tanpa membaca input dapat berpindah ke  $q_3$

# NFA dengan $\epsilon$ - Move



Dari  $q_0$  tanpa membaca input dapat berpindah ke ke  $q_1$

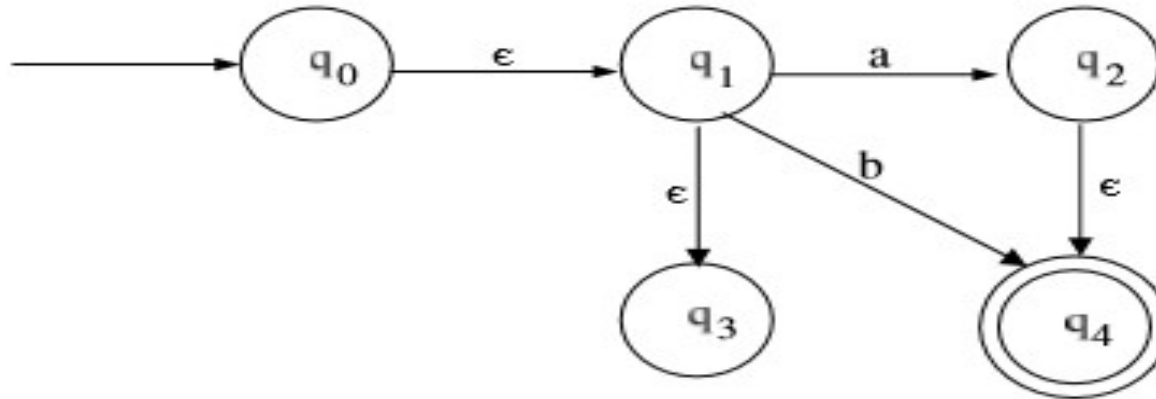
Dari  $q_1$  tanpa membaca input dapat berpindah ke ke  $q_2$

Dari  $q_4$  tanpa membaca input dapat berpindah ke ke  $q_1$

## $\epsilon$ -closure untuk suatu NFA dengan $\epsilon$ -move

- $\epsilon$ -closure adalah himpunan state-state yang dapat dicapai dari suatu state tanpa membaca input.
- $\epsilon$ -closure ( $q_0$ )=himpunan state-state yang dapat dicapai dari state  $q_0$  tanpa membaca input.
- Pada suatu state yang tidak memiliki  $\epsilon$ -move, maka  $\epsilon$ -closure nya adalah state itu sendiri.

# $\epsilon$ -Closure ( $\epsilon$ -Cl) untuk suatu Non-Deterministic Finite Automata dengan $\epsilon$ -Move



Dari gambar di atas, kita ketahui  $\epsilon$  - Closure untuk setiap state adalah sebagai berikut.

$$\epsilon - \text{Closure} ( q_0 ) = \{ q_0, q_1, q_3 \}$$

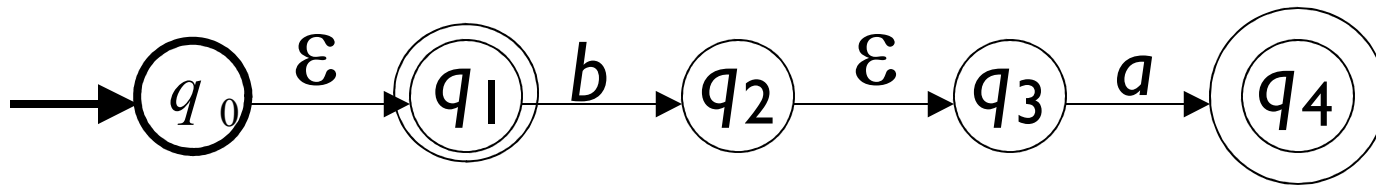
$$\epsilon - \text{Closure} ( q_1 ) = \{ q_1, q_3 \}$$

$$\epsilon - \text{Closure} ( q_2 ) = \{ q_2, q_4 \}$$

$$\epsilon - \text{Closure} ( q_3 ) = \{ q_3 \}$$

$$\epsilon - \text{Closure} ( q_4 ) = \{ q_4 \}$$

# $\epsilon$ -Closure ( $\epsilon$ -Cl) untuk suatu Non-Deterministic Finite Automata dengan $\epsilon$ -Move

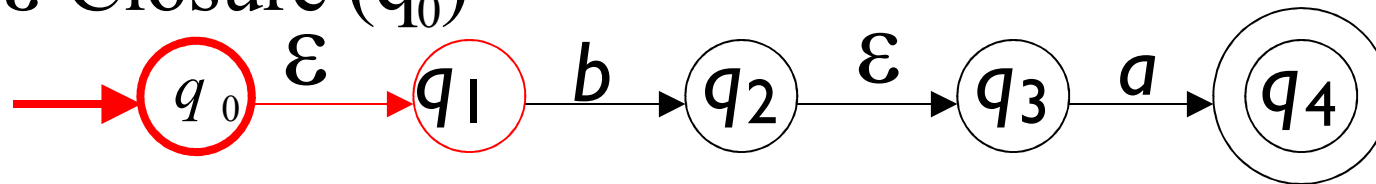


$\epsilon$ -Closure dari gambar diatas ?

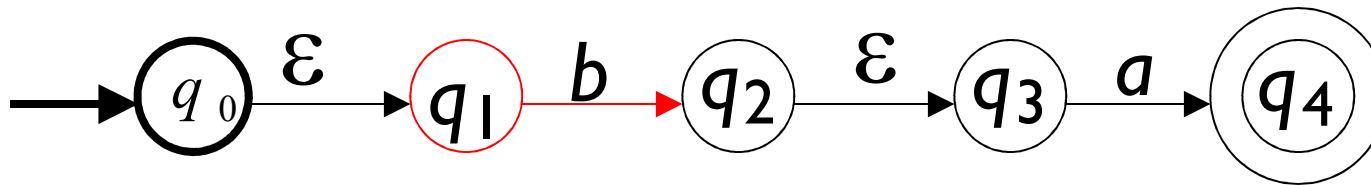


$\epsilon$ -Closure  $\{q_0, q_1\}$  untuk setiap state

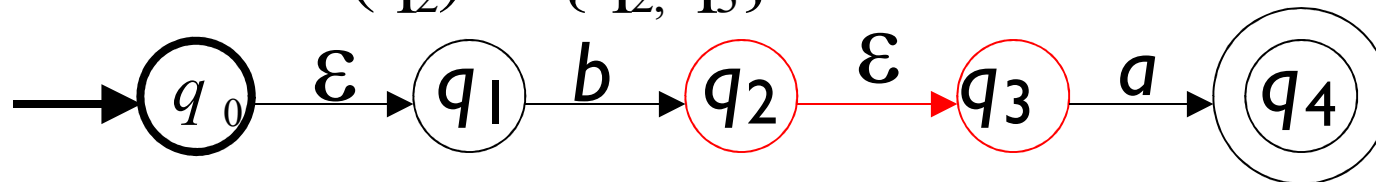
$\epsilon$ -Closure ( $q_0$ ) =



$\epsilon$ -Closure ( $q_1$ ) =  $\{q_1\}$

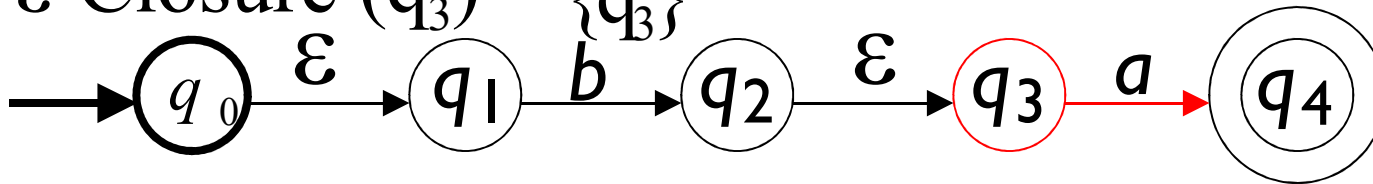


$\epsilon$ -Closure ( $q_2$ ) =  $\{q_2, q_3\}$

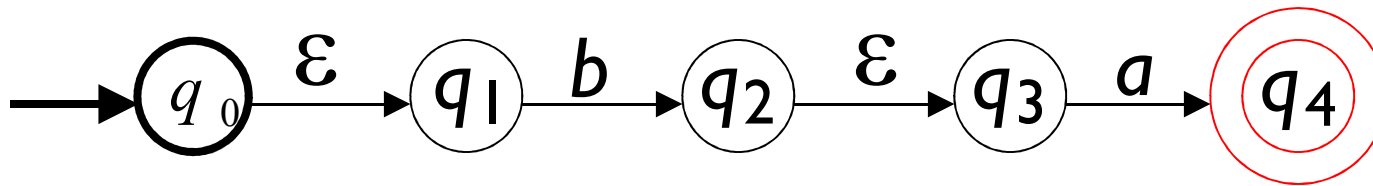


$\epsilon$ -Closure untuk setiap state

$$\epsilon\text{-Closure}(q_3) = \{q_3\}$$



$$\epsilon\text{-Closure}(q_4) = \{q_4\}$$



## Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa $\epsilon$ -Move

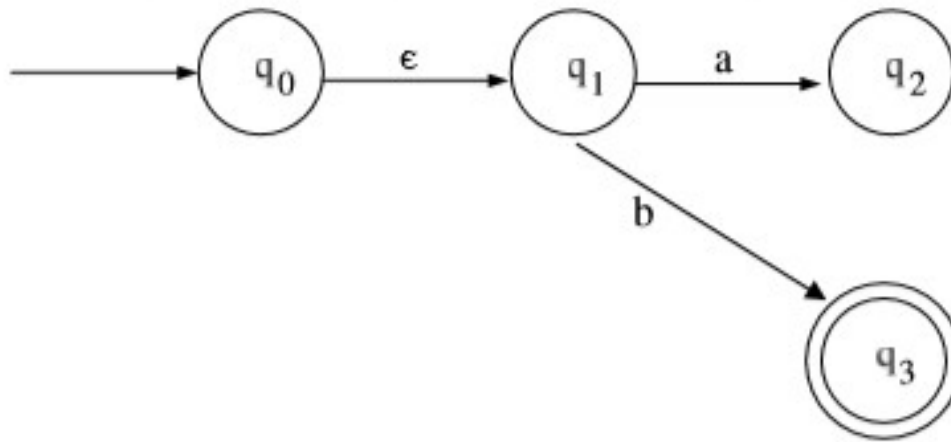
### Tahapan untuk Ekuivalensi NFA dgn $\epsilon$ \_move dgn DFA dgn $\epsilon$ \_move:

- Buat tabel transisi NFA  $\epsilon$ -move dari diagram NFA atau sudah ditentukan semula.
- Carilah  $\epsilon$ -closure untuk setiap state NFA
- Cari setiap fungsi transisi hasil perubahan dari NFA  $\epsilon$ -move ke NFA tanpa  $\epsilon$ -move ( $\delta$ ), rumus :

$$\delta'(state, input) = \epsilon\_closure(\delta(\epsilon\_closure(state, input)))$$

- Berdasarkan langkah sebelumnya, buatlah tabel transisi NFA yg baru tanpa  $\epsilon$ -move
- Tentukan state akhir. Jika State2x pada closure satu state merup final state maka state yg baru menjadi finel state.

$$F' = F \cup \{q \mid (\epsilon\_closure(q) \cap F \neq \emptyset)\}$$



## Tabel Transisi

$\delta$	a	b
$q_0$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
$q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\epsilon$ -closure dari fsa tersebut

$$\epsilon\text{-closure}(q_0) = [q_0, q_1]$$

$$\epsilon\text{-closure}(q_1) = [q_1]$$

$$\epsilon\text{-closure}(q_2) = [q_2]$$

$$\epsilon\text{-closure}(q_3) = [q_3]$$

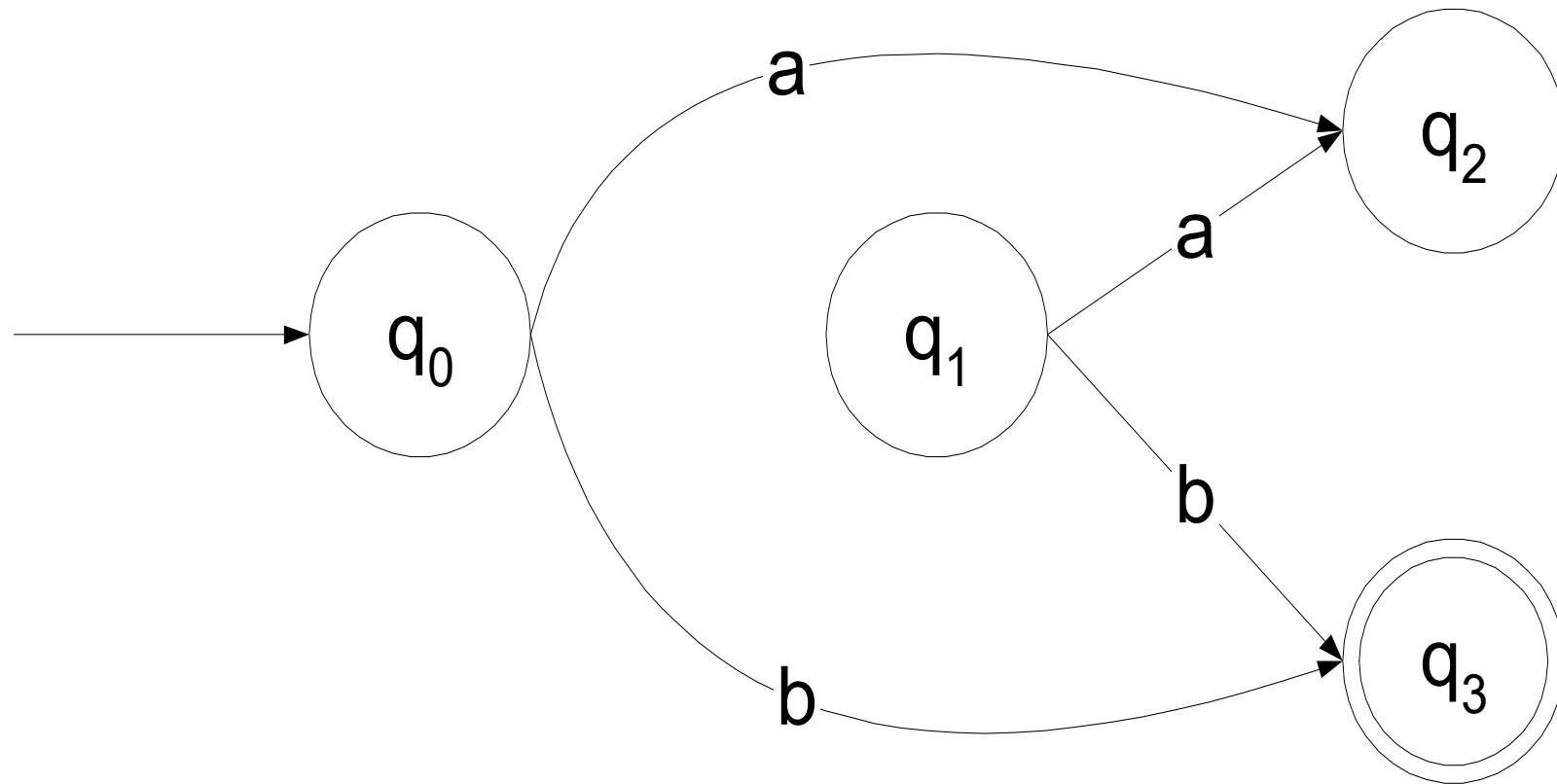
Cari tabel transisi yang baru ( $\delta'$ ) :

$\delta'$	a	b
$q_0$	$\varepsilon\text{-cl}(\delta(\varepsilon\text{-cl}(q_0), a))$ $\varepsilon\text{-cl}(\delta(\{q_0, q_1\}, a))$ $\varepsilon\text{-cl}(q_2)$ $\{q_2\}$	$\varepsilon\text{-cl}(\delta(\varepsilon\text{-cl}(q_0), b))$ $\varepsilon\text{-cl}(\delta(\{q_0, q_1\}, b))$ $\varepsilon\text{-cl}(q_3)$ $\{q_3\}$
$q_1$	$\varepsilon\text{-cl}(\delta(\varepsilon\text{-cl}(q_1), a))$ $\varepsilon\text{-cl}(\delta(\{q_1\}, a))$ $\varepsilon\text{-cl}(q_2)$ $\{q_2\}$	$\varepsilon\text{-cl}(\delta(\varepsilon\text{-cl}(q_1), b))$ $\varepsilon\text{-cl}(\delta(\{q_1\}, b))$ $\varepsilon\text{-cl}(q_3)$ $\{q_3\}$

$\delta'$	a	b
-----------	---	---

$q_2$	$\varepsilon\text{-cl}(\delta(\varepsilon\text{-cl}(q_2), a))$ $\varepsilon\text{-cl}(\delta(\{q_3\}, a))$ $\varepsilon\text{-cl}(\emptyset)$ $\emptyset$	$\varepsilon\text{-cl}(\delta(\varepsilon\text{-cl}(q_2), b))$ $\varepsilon\text{-cl}(\delta(\{q_2\}, b))$ $\varepsilon\text{-cl}(\emptyset)$ $\emptyset$
$q_3$	$\varepsilon\text{-cl}(\delta(\varepsilon\text{-cl}(q_3), a))$ $\varepsilon\text{-cl}(\delta(\{q_3\}, a))$ $\varepsilon\text{-cl}(\emptyset)$ $\emptyset$	$\varepsilon\text{-cl}(\delta(\varepsilon\text{-cl}(q_3), b))$ $\varepsilon\text{-cl}(\delta(\{q_3\}, b))$ $\varepsilon\text{-cl}(\emptyset)$ $\emptyset$

NFA tanpa  $\epsilon$ -move yang ekuivalen dengan NFA  $\epsilon$ -move



State akhir untuk diagram NFA (gambar 2)

$$\mathbf{F'} = \mathbf{F} \cup \{q \mid (\mathcal{E}\text{-closure}(q) \cap \mathbf{F}) \neq \emptyset\}$$

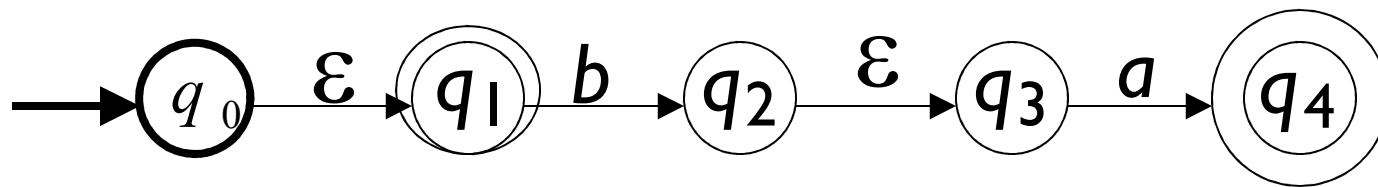
diketahui state akhir / F semula adalah  $\{q_3\}$ .

Cari state lain yang  $\mathcal{E}$ -closure-nya memuat  $q_3$ .

Karena tidak ada maka himpunan state akhir utk NFA gambar adalah tetap  $q_3$



# Ekivalensi NFA dengan $\epsilon$ - Move ke NFA tanpa $\epsilon$ - Move



Gbr . Mesin 5

Penjelasan : dari  $q_2$  tanpa membaca input dapat berpindah ke  $q_3$

Bagaimana Ekivalensi NFA dengan  $\epsilon$ - Move ke NFA tanpa  $\epsilon$ - Move pada mesin 5?

# Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa $\epsilon$ -Move

1. Buatlah 5 tuple dari mesin 5

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$S = q_0$$

$$F = \{q_1, q_4\}$$

$\delta$	a	b
q0	$\emptyset$	$\emptyset$
q1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q2	$\emptyset$	$\emptyset$
q3	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q4	$\emptyset$	$\emptyset$

## 2. Membuat $\varepsilon$ -closure untuk setiap state

$$\varepsilon\text{-Closure } (q_0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\varepsilon\text{-Closure } (q_1) = \{q_1\}$$

$$\varepsilon\text{-Closure } (q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\varepsilon\text{-Closure } (q_3) = \{q_3\}$$

$$\varepsilon\text{-Closure } (q_4) = \{q_4\}$$

3. Buatlah transisi ( $\delta'$ ) untuk Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input  $a$

$$\delta'(q_0, a) = (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(\epsilon\text{-Cl}(q_0), a)))$$

3. Buatlah transisi ( $\delta'$ ) untuk Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input a

$$\delta'(q_0, a) = (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(\epsilon\text{-Cl}(q_0), a)))$$



$$(q_0, q_1)$$

$$\epsilon\text{-Closure}(q_0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\epsilon\text{-Closure}(q_1) = \{q_1\}$$

$$\epsilon\text{-Closure}(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\epsilon\text{-Closure}(q_3) = \{q_3\}$$

$$\epsilon\text{-Closure}(q_4) = \{q_4\}$$

3. Buatlah transisi ( $\delta'$ ) untuk Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input  $a$

$$\delta'(q_0, a) = (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(\epsilon\text{-Cl}(q_0), a)))$$



$$(q_0, q_1)$$



$$= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'((q_0, q_1), a)))$$

3. Buatlah transisi ( $\delta'$ ) untuk Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input a

$$\begin{aligned} \delta'(q_0, a) &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(\epsilon\text{-Cl}(q_0), a))) \\ &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'((q_0, q_1), a))) \end{aligned}$$

$\delta$	a	b
q0	$\emptyset$	$\emptyset$
q1	$\emptyset$	{q2}
q2	$\emptyset$	$\emptyset$
q3	{q4}	$\emptyset$
q4	$\emptyset$	$\emptyset$

3. Buatlah transisi ( $\delta'$ ) untuk Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input  $a$

$$\begin{aligned}\delta'(q_0, a) &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(\epsilon\text{-Cl}(q_0), a))) \\ &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'((q_0, q_1), a)))\end{aligned}$$



$\theta$



3. Buatlah transisi ( $\delta'$ ) untuk Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input a

$$\begin{aligned} \delta'(q_0, a) &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(\epsilon\text{-Cl}(q_0), a))) \\ &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'((q_0, q_1), a))) \end{aligned}$$



$q_0$

$\delta$	a	b
$q_0$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_1$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_3$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
$q_4$	$\emptyset$	$\emptyset$

3. Buatlah transisi ( $\delta'$ ) untuk Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input  $a$

$$\begin{aligned} \delta'(q_0, a) &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(\epsilon\text{-Cl}(q_0), a))) \\ &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'((q_0, q_1), a))) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \emptyset & \cup & \emptyset = \emptyset \end{array}$$

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input a

$$\delta'(q_0, a) = (\epsilon - Cl(\delta'(\epsilon - Cl(q_0), a)))$$

$$= (\epsilon - Cl(\delta'((q_0, q_1), a)))$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \theta & U & \theta \end{array} = \theta$$



$$= (\epsilon - Cl(\theta))$$

3. Buatlah transisi ( $\delta'$ ) untuk Ekuivalensi Non-Deterministic Finite Automata dengan  $\epsilon$ -move ke Deterministic Finite Automata tanpa  $\epsilon$ -Move

a.  $\delta'$  state  $q_0$  dengan input  $a$

$$\begin{aligned}\delta'(q_0, a) &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(\epsilon\text{-Cl}(q_0), a))) \\ &= (\epsilon\text{-Cl}(\delta'(q_0, q_1), a)) \\ &= (\epsilon\text{-Cl}(\theta)) \\ &= \theta\end{aligned}$$

Sehingga  $\delta'(q_0, a) = \theta$

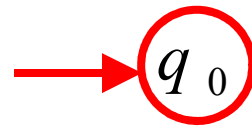
$\delta'$  untuk setiap state dan input

$\delta'$	a	b
q0	$\theta$	{q2, q3}
q1	$\Theta$	{q2, q3}
q2	{q4}	$\theta$
q3	{q4}	$\theta$
q4	$\theta$	$\theta$

## 4. Membuat mesin NFA tanpa $\epsilon$ -move

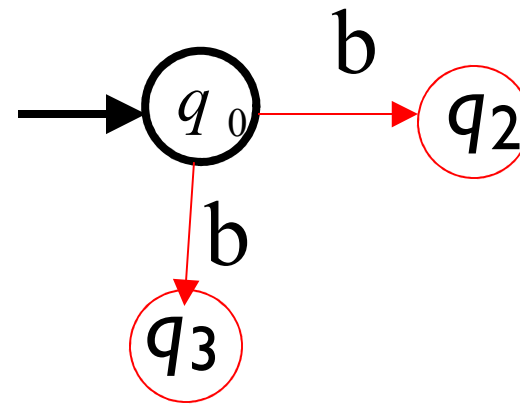
$\delta$	a	b
q0	$\emptyset$	{q2, q3}
q1	$\emptyset$	{q2, q3}
q2	{q4}	$\emptyset$
q3	{q4}	$\emptyset$
q4	$\emptyset$	$\emptyset$

State q0 input a



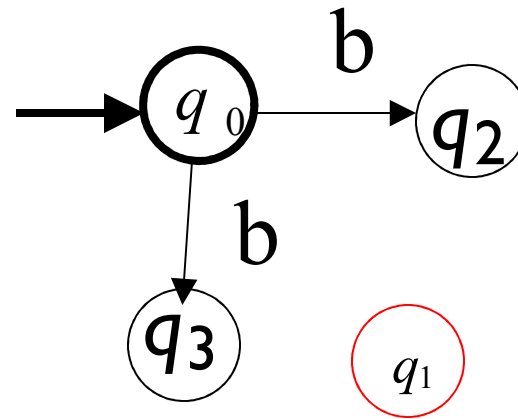
# State $q_0$ input $b$

$\delta'$	a	b
$q_0$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$
$q_1$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$
$q_2$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
$q_3$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
$q_4$	$\emptyset$	$\emptyset$



# State q1 input a

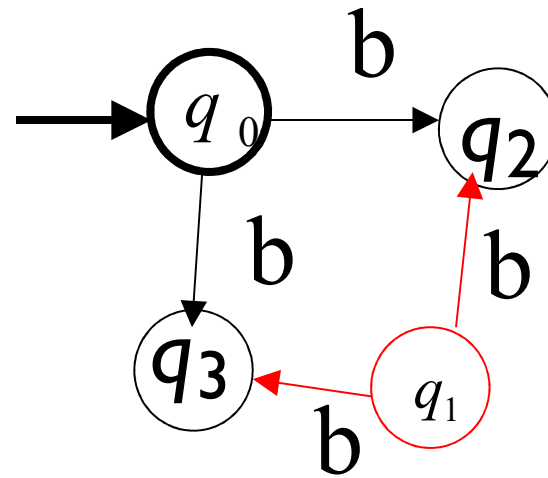
$\delta$	a	b
q0	$\theta$	{q2, q3}
q1	$\Theta$	{q2, q3}
q2	{q4}	$\theta$
q3	{q4}	$\theta$
q4	$\theta$	$\theta$





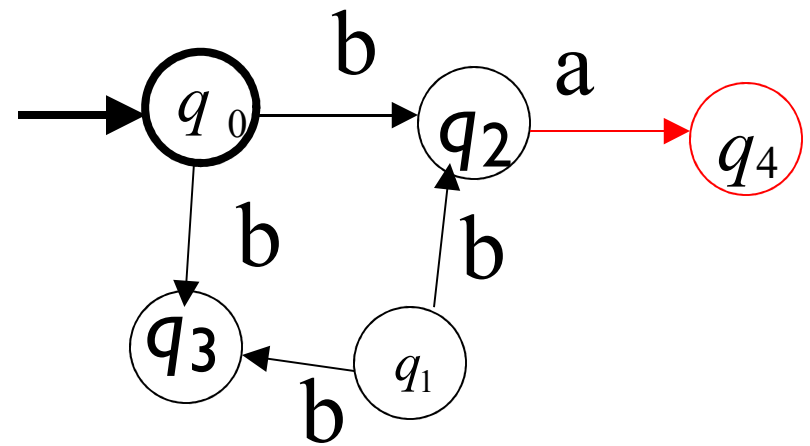
# State q1 input b

$\delta'$	a	b
q0	$\theta$	{q2, q3}
q1	$\Theta$	{q2, q3}
q2	{q4}	$\theta$
q3	{q4}	$\theta$
q4	$\theta$	$\theta$



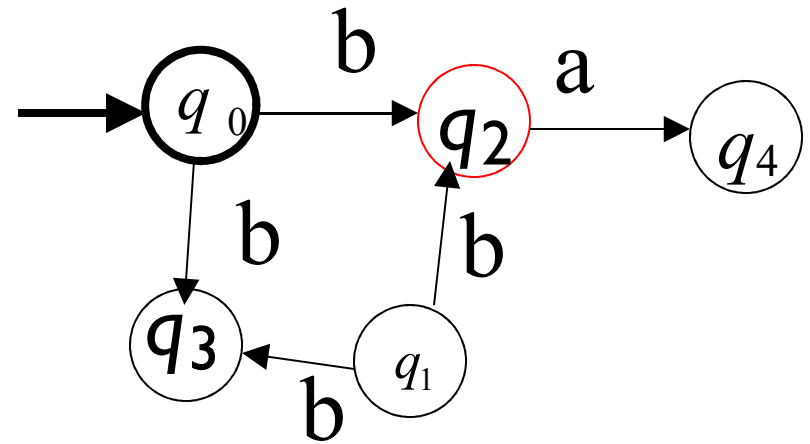
# State q2 input a

$\delta'$	a	b
q0	$\emptyset$	{q2, q3}
q1	$\emptyset$	{q2, q3}
q2	{q4}	$\emptyset$
q3	{q4}	$\emptyset$
q4	$\emptyset$	$\emptyset$



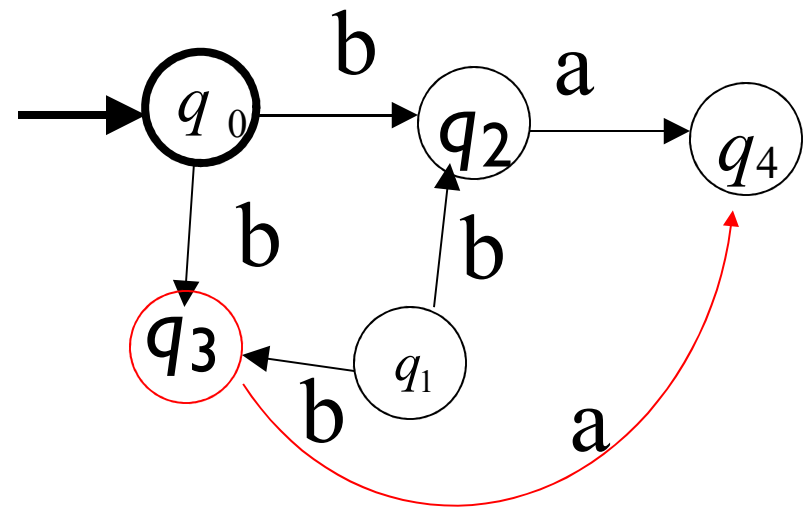
# State q2 input b

$\delta'$	a	b
q0	$\emptyset$	{q2, q3}
q1	$\emptyset$	{q2, q3}
q2	{q4}	$\emptyset$
q3	{q4}	$\emptyset$
q4	$\emptyset$	$\emptyset$



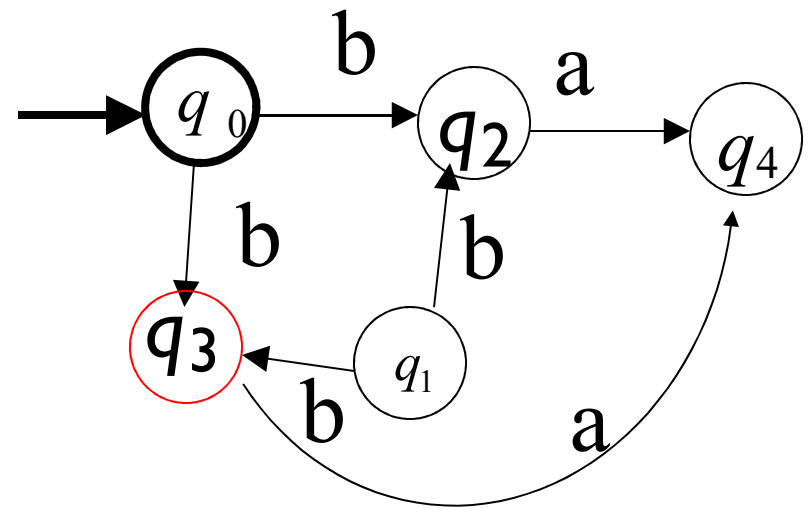
# State $q_3$ input a

$\delta$	a	b
$q_0$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$
$q_1$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$
$q_2$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
$q_3$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
$q_4$	$\emptyset$	$\emptyset$



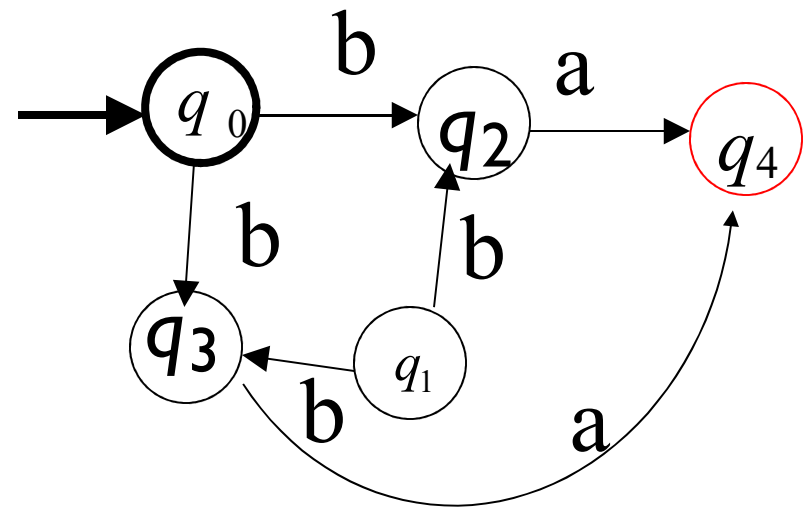
# State $q_3$ input $b$

$\delta$	a	b
$q_0$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$
$q_1$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$
$q_2$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
$q_3$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
$q_4$	$\emptyset$	$\emptyset$



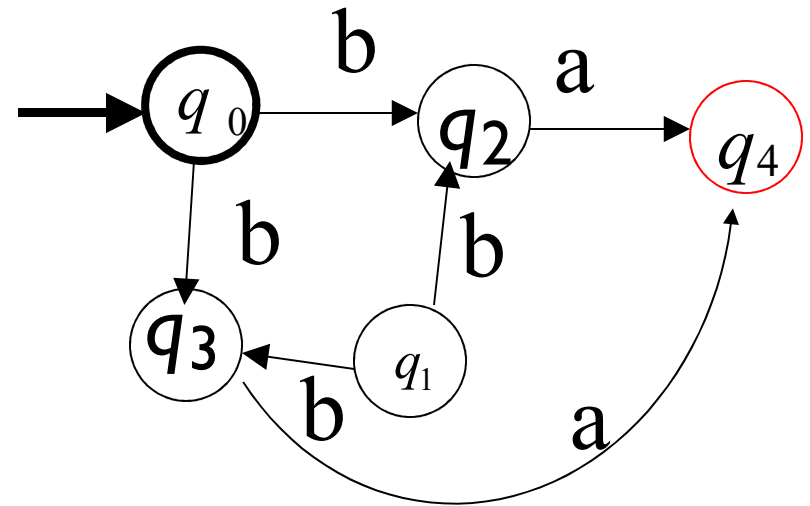
# State q4 input a

$\delta'$	a	b
q0	$\emptyset$	{q2, q3}
q1	$\emptyset$	{q2, q3}
q2	{q4}	$\emptyset$
q3	{q4}	$\emptyset$
q4	$\emptyset$	$\emptyset$



# State q4 input b

$\delta'$	a	b
q0	$\emptyset$	{q2, q3}
q1	$\emptyset$	{q2, q3}
q2	{q4}	$\emptyset$
q3	{q4}	$\emptyset$
q4	$\emptyset$	$\emptyset$



# Menentukan state akhir

1. Tentukan F pada NFA dengan  $\epsilon$ -move

$$F = \{q_1, q_4\}$$

2. Tentukan  $\epsilon$ -closure yang mengandung F pada NFA dengan

$$\epsilon\text{-closure}(q_0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\epsilon\text{-closure}(q_1) = \{$$

$$q_1\}$$

$$\epsilon\text{-closure}(q_2) = \{q_2,$$

$$q_3\}$$

$$\epsilon\text{-closure}(q_3) = \{q_3\}$$

$$\epsilon\text{-closure}(q_4) = \{q_4\}$$

karena

$$\epsilon\text{-closure}(q_0) = \{q_0, q_1\}$$

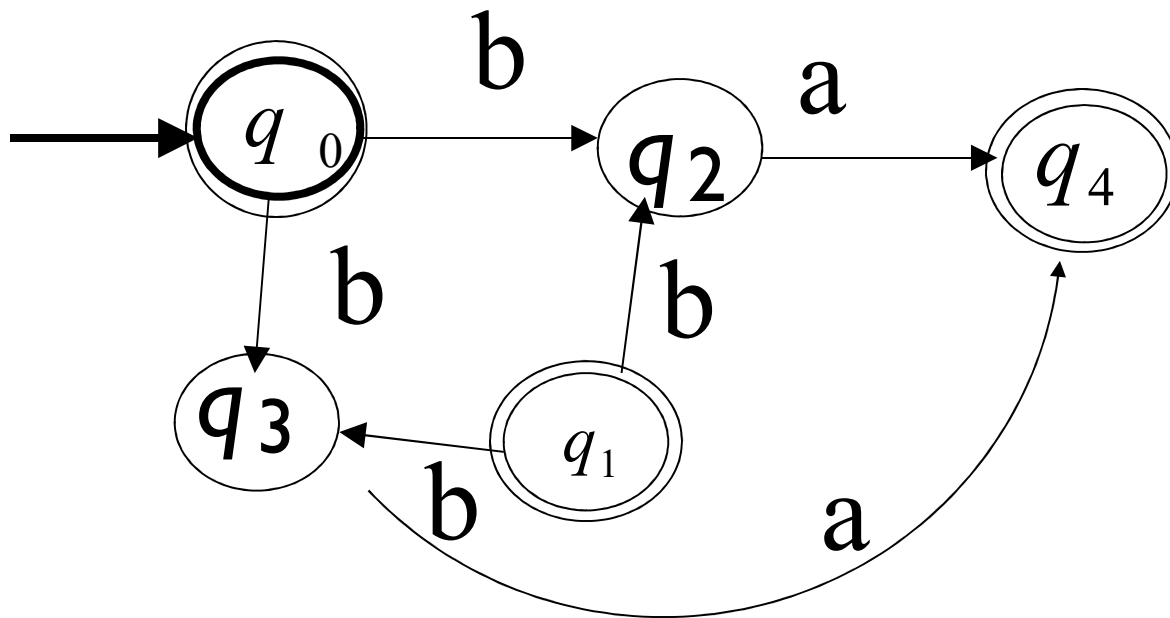
$$\epsilon\text{-closure}(q_1) = \{q_1\}$$

$$\epsilon\text{-closure}(q_4) = \{q_4\}$$

$$\text{maka } F = \{q_0, q_1, q_4\}$$



# MESIN5 TANPA $\epsilon$ -MOVE



# Reduksi Jumlah *State* Pada FSA - Relasi

Pasangan dua buah state memiliki salah satu kemungkinan : distinguishable atau indistinguishable tetapi tidak kedua-duanya. Dalam hal ini terdapat sebuah relasi :

Jika  $p$  dan  $q$  indistinguishable,  
dan  $q$  dan  $r$  indistinguishable  
maka  $p, r$  indistinguishable dan  
 $p, q, r$  indistinguishable

Dalam melakukan evaluasi state, didefinisikan suatu relasi : Untuk  $Q$  yg merupakan himpunan semua state

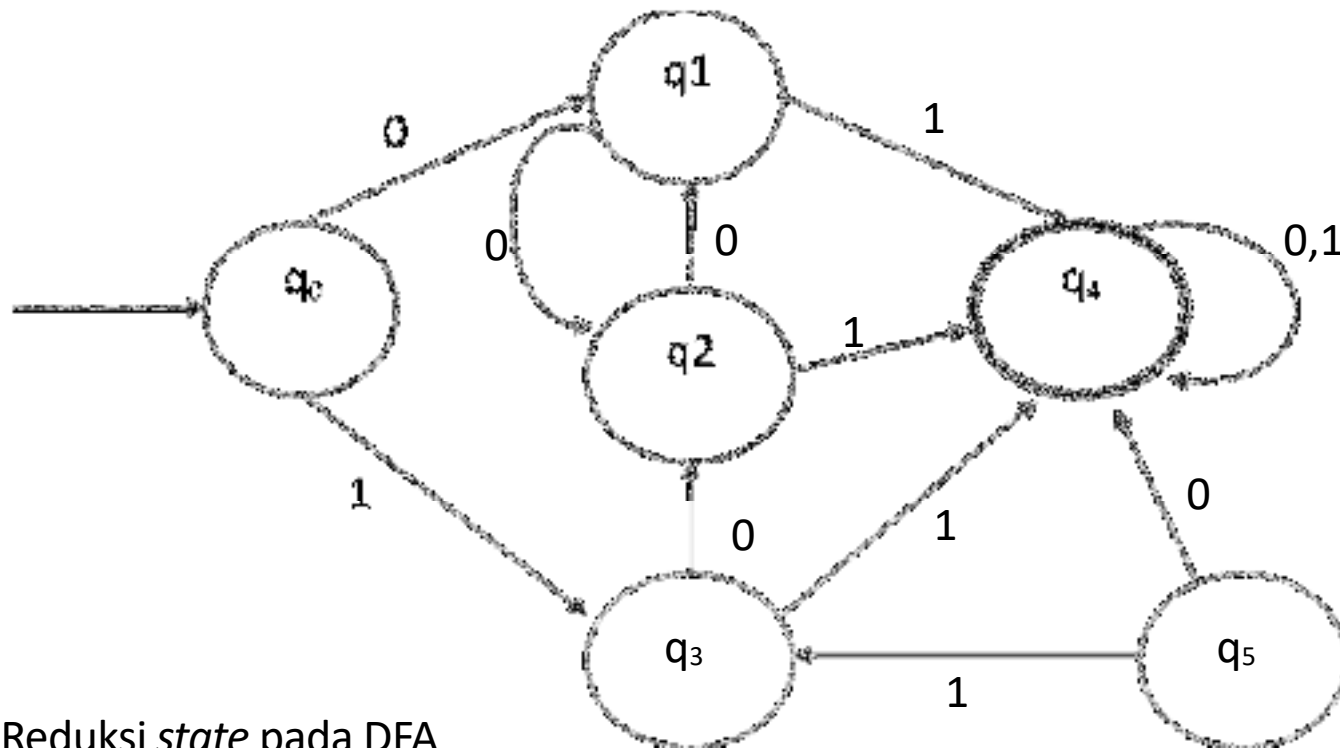
- $D$  adalah himpunan state-state distinguishable, dimana  $D \subset Q$
- $N$  adalah himpunan state-state indistinguishable, dimana  $N \subset Q$
- maka  $x \in N$  jika  $x \in Q$  dan  $x \notin D$

# Reduksi Jumlah *State* Pada FSA – Step

- Hapuslah semua state yg tidak dapat dicapai dari state awal (*useless state*)
- Buatlah semua pasangan state  $(p, q)$  yang *distinguishable*, dimana  $p \in F$  dan  $q \notin F$ . Catat semua pasangan-pasangan *state* tersebut.
- Cari *state* lain yang *distinguishable* dengan aturan:
  - “Untuk semua  $(p, q)$  dan semua  $a \in \Sigma$ , hitunglah  $\delta(p, a) = p_a$  dan  $\delta(q, a) = q_a$ . Jika pasangan  $(p_a, q_a)$  adalah pasangan *state* yang *distinguishable* maka pasangan  $(p, q)$  juga termasuk pasangan yang *distinguishable*.”
- Semua pasangan *state* yang tidak termasuk sebagai *state* yang *distinguishable* merupakan *state-state indistinguishable*.
- Beberapa *state* yang *indistinguishable* dapat digabungkan menjadi satu *state*.
- Sesuaikan transisi dari *state-state* gabungan tersebut.

# Reduksi Jumlah *State* Pada FSA – Contoh

Sebuah Mesin DFA

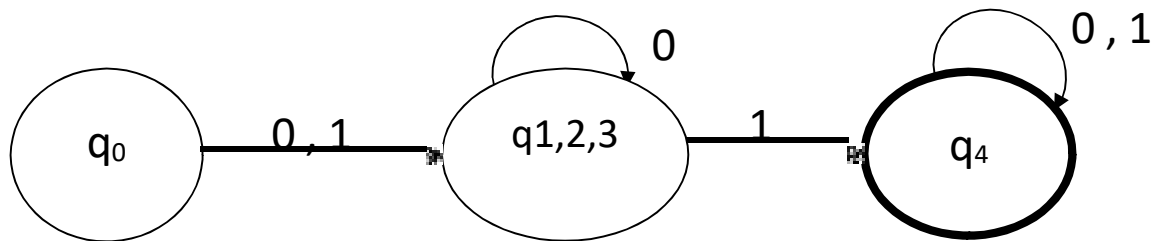


Lakukan Reduksi *state* pada DFA diatas?



# Reduksi Jumlah *State* Pada FSA – Step

- Setelah diperiksa semua pasangan *state* maka terdapat *state-state* yang *distinguishable* :  $(q_0, q_1)$ ,  $(q_0, q_2)$ ,  $(q_0, q_3)$ ,  $(q_0, q_4)$ ,  $(q_1, q_4)$ ,  $(q_2, q_4)$ ,  $(q_3, q_4)$   
Karena berdasarkan relasi-relasi yang ada, tidak dapat dibuktikan  $(q_1, q_2)$ ,  $(q_1, q_3)$  dan  $(q_2, q_3)$  *distinguishable*, sehingga disimpulkan pasangan-pasangan *state* tersebut *indistinguishable*.
- Karena  $q_1$  *indistinguishable* dengan  $q_2$ ,  $q_2$  *indistinguishable* dengan  $q_3$ , maka dapat disimpulkan  $q_1, q_2, q_3$  saling *indistinguishable* dan dapat dijadikan satu *state*.
- Berdasarkan hasil diatas maka hasil dari DFA yang direduksi menjadi:



# Kesimpulan reduksi

Pasangan distinguishable  $(q_0, q_4)$ ,  $(q_1, q_4)$ ,  $(q_2, q_4)$ ,  $(q_3, q_4)$ .

Pasangan sisanya  $(q_0, q_1)$ ,  $(q_0, q_2)$ ,  $(q_0, q_3)$ ,  $(q_1, q_2)$ ,  $(q_1, q_3)$ ,  $(q_2, q_3)$

pasangan	state 1		state 2		hasil
	0	1	0	1	
$(q_0, q_1)$	q1	q3	q2	q4	distinguishable
$(q_0, q_2)$	q1	q3	q1	q4	distinguishable
$(q_1, q_2)$	q2	q4	q1	q4	indistinguishable
$(q_0, q_3)$	q1	q3	q2	q4	distinguishable
$(q_1, q_3)$	q2	q4	q2	q4	indistinguishable
$(q_2, q_3)$	q1	q4	q2	q4	indistinguishable