

# **PUSH-DOWN AUTOMATA**

## ***Push Down Automata (PDA)***

**Merupakan mesin otomata dari bahasa bebas konteks.**

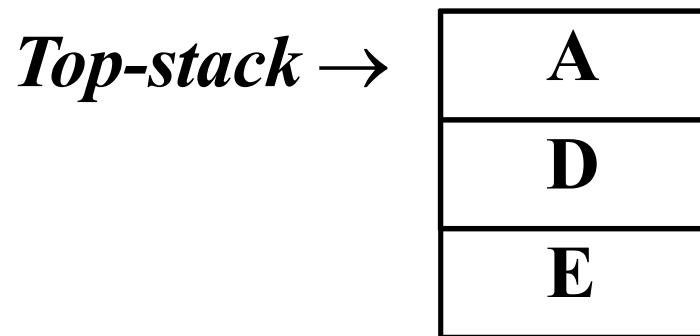
**Perbedaan PDA dengan Otomata Hingga terletak pada kemampuan memori. Otomata hingga mempunyai memori yang terbatas, sedangkan PDA mempunyai memori yang tidak terbatas, berupa *stack*.**

***Stack* adalah kumpulan dari elemen-elemen sejenis dengan sifat penambahan elemen dan pengambilan elemen melalui suatu tempat yang disebut *top of stack*.**

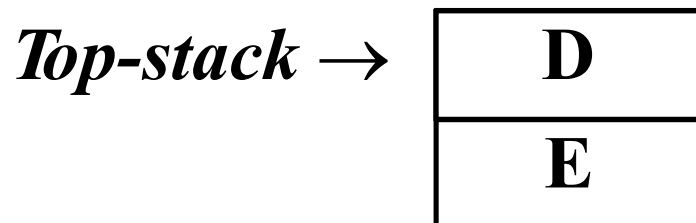
Aturan pengisian atau pengeluaran elemen *stack* menganut sistem LIFO (*Last In First Out*).

Pengambilan elemen dari *stack* dikenal dengan istilah *pop*. Sedangkan memasukkan elemen ke dalam *stack* dikenal dengan istilah *push*.

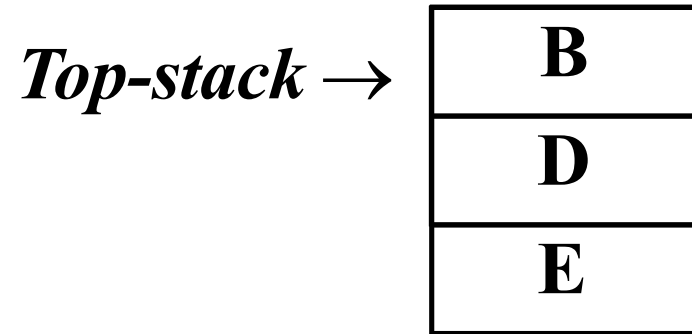
Contoh sebuah *stack*



Bila dilakukan operasi *pop*, maka kondisi *stack* menjadi:



**Bila dilakukan operasi *push* B, maka kondisi *stack* menjadi:**



**Sebuah PDA dinyatakan dalam 7 tupel:**

**$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, S, F, Z)$**

**$Q =$  himpunan *state***

**$\Sigma =$  himpunan simbol input**

**$\Gamma =$  simbol-simbol tumpukan / *stack***

**$\Delta =$  fungsi transisi**

**$S =$  *state* awal,  $S \in Q$**

**$F =$  himpunan *final state*,  $F \subseteq Q$**

**$Z =$  simbol awal tumpukan / *top stack*,  $Z \in \Gamma$**

**Dari komponen diatas dapat disimpulkan bahwa:**

- Definisi untuk  $Q, \Sigma, S, F$  sama dengan yang ada pada otomata hingga.**
- Tupel baru adalah  $\Gamma, Z$  yang berhubungan dengan *stack*.**
- $\Delta$  memiliki kemiripan dengan  $\delta$  pada otomata hingga dengan beberapa perbedaan.**

**PDA dapat dianggap sebagai otomata hingga yang dilengkapi dengan *stack*.**

**Sebuah PDA yang menerima *input*, selain bisa berpindah *state* juga bisa melakukan operasi pada *stack*.**

**Kondisi atau konfigurasi PDA pada suatu saat dinyatakan dengan *state* dan *stack*.**

**Jenis transisi pada PDA;**

- 1. Membaca simbol *input***
- 2. Tanpa membaca simbol *input*.**

## 1. Membaca simbol input

Pada PDA yang membaca simbol input, terdapat sejumlah pilihan yang mungkin, bergantung pada simbol *input*, simbol pada *top-stack*, dan *state*.

Setiap pilihan terdiri dari *state* berikutnya dan simbol-simbol (bisa satu, beberapa, atau kosong) untuk mengganti simbol pada *top-stack*.

Penggantian simbol pada *top-stack* bisa berupa *push*, untuk satu atau beberapa simbol, atau berupa *pop* untuk simbol kosong.

Setelah membuat pilihan, kemudian PDA membaca simbol *input* berikutnya.

## **2. Tanpa membaca simbol input**

**Jenis transisi tanpa membaca input adalah transisi yang dilakukan tanpa membaca *input* atau  $\epsilon$ .**

**Transisi ini memungkinkan PDA memanipulasi isi *stack* atau berpindah *state* tanpa membaca *input*.**

### **Jenis-jenis PDA:**

- 1. PDA *null stack*, yaitu PDA yang melakukan penerimaan *input* dengan *stack* kosong.**
- 2. PDA *final state*, yaitu PDA yang melakukan penerimaan *input* yang pilihan transisinya menyebabkan PDA mencapai *final state*.**



## Contoh 14.1

### Sebuah PDA

$$Q = \{q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{A, B, Z\}$$

$$S = q_1$$

$$Z = Z$$

$$F = \{q_2\}$$

**PDA tersebut memiliki fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

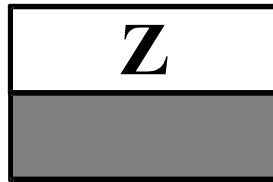
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

**Kita bisa membaca fungsi transisi tsb. sebagai berikut.**

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

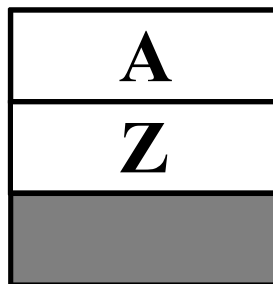
**Mesin dengan konfigurasi:**

*State*  $q_1$  dan *top-stack*  $Z$   
membaca *input* 'a'



**Konfigurasi menjadi:**

*State*  $q_1$ , *push*  $A$  ke *stack*,  
 $A$  menjadi *top-stack*



**Fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

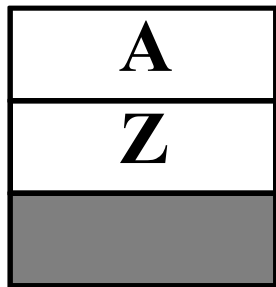
$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

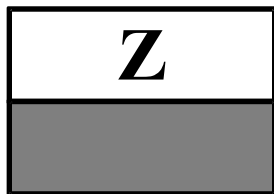
**Mesin dengan konfigurasi:**

*State*  $q_1$  dan *top-stack* A  
membaca *input* 'b'



**Konfigurasi menjadi:**

*State*  $q_1$ , *pop* A dari *stack*,  
elemen di bawah A  
menjadi *top-stack*



**Fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

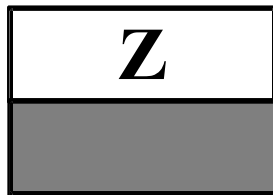
$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

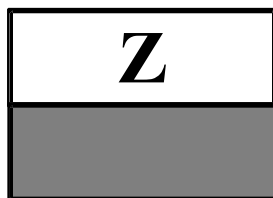
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

**Mesin dengan konfigurasi:**  
*State*  $q_1$  dan *top-stack*  $Z$   
tanpa membaca *input*.



**Konfigurasi menjadi:**  
*State*  $q_2$ , *stack* tidak berubah



**Fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

## Contoh 14.2

### Sebuah PDA

$$Q = \{q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{A, B, Z\}$$

$$S = q_1$$

$$Z = Z$$

$$F = \{q_2\}$$

PDA tersebut memiliki fungsi transisi:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

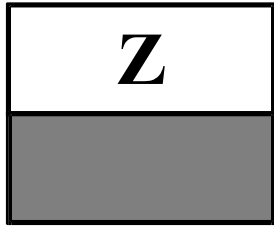
$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

**Tentukan apakah PDA diatas dapat menerima *string* 'abba'**

**Penyelesaian:**

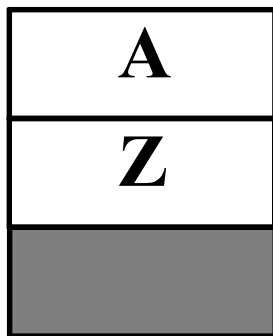


1. **Konfigurasi awal mesin:**  
**state  $q_1$ , *top-stack*  $Z$ ,**  
**membaca input 'a'.**

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
***state*  $q_1$  dan *push*  $A$**



**Fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

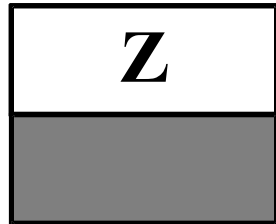
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

## 2. Membaca *input* 'b'.

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:  
*state*  $q_1$  dan *top-stack* di *pop*

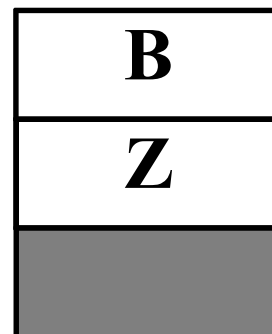


## 3. Membaca *input* 'b'.

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:  
*state*  $q_1$  dan B di *push*



Fungsi transisi:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

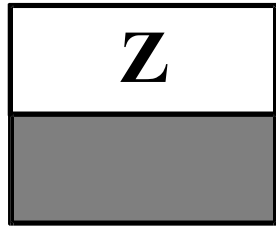
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

#### 4. Membaca *input* 'a'.

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:  
*state*  $q_1$  dan *top-stack* di *pop*



Fungsi transisi:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, AZ)\}$$

$$\Delta(q_1, b, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$$

$$\Delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, a, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

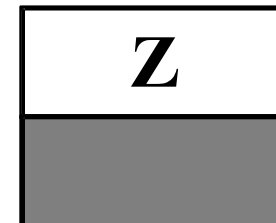
$$\Delta(q_1, b, B) = \{(q_1, BB)\}$$

#### 5. Semua input sudah selesai dibaca.

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi: *state*  $q_2$   
*State*  $q_2$  berada dalam F (*final state*),  
maka 'abba' diterima oleh PDA





## Contoh 14.3

### Sebuah PDA

$$Q = \{q_1, q_2\} ; \Sigma = \{0, 1, 2\} ; \Gamma = \{Z, B, G\} ;$$

$$S = \{q_1, q_2\} ; Z = Z ; F = \emptyset$$

**PDA tersebut memiliki fungsi transisi:**

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

**Tentukan apakah PDA diatas dapat menerima string '020'**

**Penyelesaian:**

<b>Z</b>
----------

**1. Konfigurasi awal mesin:**

*state*  $q_1$ , *top-stack* **Z**,  
menerima input '0'.

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**

*state*  $q_1$  dan *push* **B**

<b>B</b>
----------

<b>Z</b>
----------

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

## 2. Membaca input '2'

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan *stack* tetap

<b>B</b>
<b>Z</b>

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

### 3. Membaca input '0'

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan  $B$  di *pop*



$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

#### 4. Tanpa membaca input ( $\epsilon$ )

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_2, \epsilon, Z) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan  $Z$  di *pop*

*Stack* kosong



Karena *string* '020' telah selesai dibaca dan berakhir pada *stack* kosong, maka PDA dapat menerima *string* '020'.

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \epsilon, Z) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

## **2. PDA untuk suatu tata bahasa bebas konteks**

**PDA adalah merupakan penerima bahasa-bahasa bebas konteks, sehingga dari suatu tata bahasa bebas konteks kita dapat memperoleh sebuah PDA, begitu juga sebaliknya.**

**Sebuah PDA bisa dibuat untuk kumpulan aturan Produksi dari suatu tata bahasa bebas konteks.**

**Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:**

### **1. Definisikan:**

$$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$S = q_1$$

$$F = \{q_3\}$$

$$\Sigma = \text{simbol terminal}$$

**Untuk yang berhubungan dengan *stack*, tentukan :**

**$\Gamma$  = semua simbol variabel, simbol terminal, dan  
 $Z$  (simbol awal *stack*)**

**2. Mesin ini dimulai dengan mem-*push*  $Z$  pada top *stack*. Pada setiap langkah berikutnya dilakukan salah satu dari dua hal berikut:**

- Jika *top-stack* adalah variabel, misal  $A$ , kita gantikan dengan ruas kanan dari  $A$ , misal  $A \rightarrow w$ , maka kita ganti dengan  $w$ .**
- Jika *top-stack* adalah terminal, dan sama dengan simbol masukan berikutnya, maka kita *pop* dari *stack*.**

**3. Berdasarkan aturan diatas, kita dapat mengkonstruksi empat tipe transisi berikut.**

- $\Delta (q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, SZ)\}$  untuk mem-*push* simbol awal (S) ke *stack*.
- $\Delta (q_2, \varepsilon, A) = \{(q_2, w) \mid A \rightarrow w \text{ adalah sebuah simbol produksi dalam tata bahasa bebas konteks itu}\}$  untuk semua variabel A.
- $\Delta (q_2, a, a) = \{(q_2, \varepsilon)\}$  untuk setiap simbol terminal (untuk mem-*pop* pembandingan terminal yang sama)
- $\Delta (q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$ , bila selesai membaca semua *input* dan *top-stack* adalah Z, berarti *string input* sukses diterima oleh PDA (  $q_3$  *state* akhir)



## Contoh 14.4

Sebuah tata bahasa bebas konteks,  $D \rightarrow aDa \mid bDb \mid c$   
PDA nya dapat dikonstruksi menjadi:

$$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$S = q_1$$

$$F = \{q_3\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{D, a, b, c, Z\}$$

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), (q_2, bDb), (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) = \Delta(q_2, c, c) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

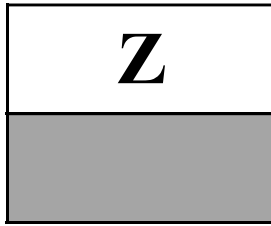
$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

**Dari aturan produksi yang ada, tata bahasa bebas konteks tersebut bisa menurunkan untai 'aca' dari**

$$\mathbf{D \Rightarrow aDa \Rightarrow aca}$$

**Karena tata bahasa bebas konteks bisa menurunkan *string* 'aca', maka PDA juga harus dapat menerima untai tersebut.**

**Langkah pemeriksaan:**

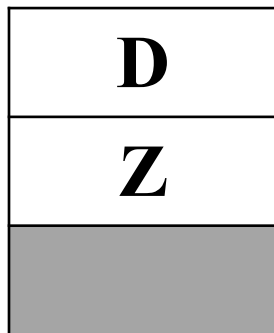


1. **Konfigurasi awal mesin:**  
 state  $q_1$  , *top-stack*  $Z$ ,  
 tanpa menerima *input* ( $\varepsilon$ ).

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan *push*  $D$



**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa),$$

$$(q_2, bDb),$$

$$(q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b)$$

$$= \Delta(q_2, c, c)$$

$$= \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

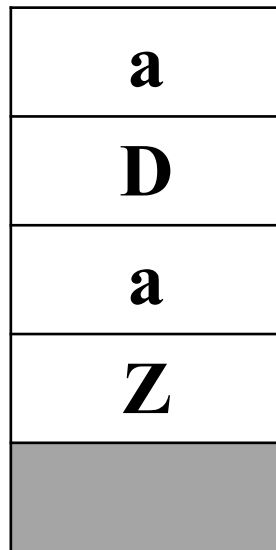
## 2. Tanpa menerima *input* ( $\epsilon$ ).

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, \epsilon, D) = \{(q_2, aDa)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$ , *pop top-stack push* 'aDa'



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \epsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \epsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \epsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

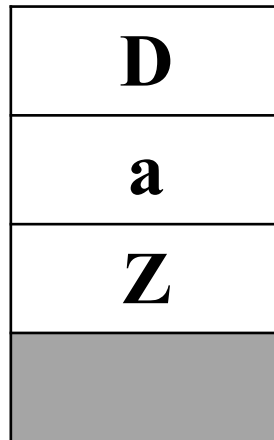
### 3. Menerima *input* 'a'

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, a, a) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$  , *pop top-stack*



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

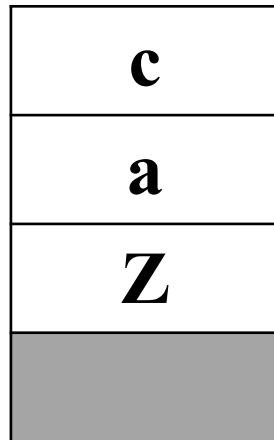
#### 4. Tanpa menerima *input* ( $\varepsilon$ )

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, \varepsilon, \mathbf{D}) = \{(q_2, \mathbf{c})\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$ , *pop top-stack*,  
*push c*



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, \mathbf{Z}) = \{(q_2, \mathbf{DZ})\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, \mathbf{D}) = \{(q_2, \mathbf{aDa}), \\ (q_2, \mathbf{bDb}), \\ (q_2, \mathbf{c})\}$$

$$\Delta(q_2, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \Delta(q_2, \mathbf{b}, \mathbf{b}) \\ = \Delta(q_2, \mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

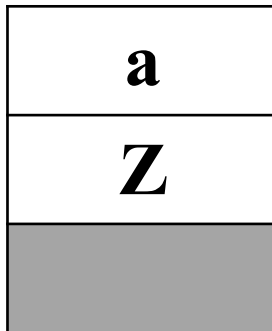
$$\Delta(q_2, \varepsilon, \mathbf{Z}) = \{(q_3, \mathbf{Z})\}$$

## 5. Menerima *input* 'c'

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, c, c) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:  
*state*  $q_2$ , *pop top-stack*



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

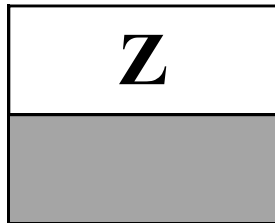
## 6. Menerima *input* 'a'

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, a, a) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$ , *pop top-stack*



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$



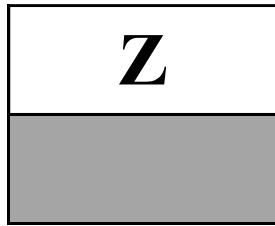
## 7. Tanpa menerima *input* ( $\varepsilon$ )

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_3$



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

Tidak ada transisi lagi dari  $q_3$  .

Karena  $q_3$  *state* akhir dan semua *input* sudah selesai dibaca, sehingga menandakan untai 'aca' diterima oleh PDA tersebut.

### 14.3 Deskripsi seketika pada PDA

Langkah 1 s.d. 7 pada contoh soal 14.4, dapat juga dinyatakan dalam suatu notasi yang disebut deskripsi seketika (*instantaneous description*).

Deskripsi seketika tersebut digunakan untuk menyatakan secara formal konfigurasi PDA pada suatu saat.

Perubahan dari suatu kondisi ke kondisi berikutnya dipisahkan dengan tanda '⊢'.

Konfigurasi suatu saat dapat dinyatakan dengan *triplet*:  $(q, w, u)$

Dimana  $q$  menyatakan *state*,  $w$  adalah *string* yang belum dibaca, sedangkan  $u$  adalah isi *stack* dengan simbol terkiri adalah *pop-stack*.

**Tahapan nomor 1 s.d. 7 dapat dinyatakan sebagai berikut:**

**$(q_1, aca, Z) \vdash (q_2, aca, DZ) \vdash (q_2, aca, aDaZ) \vdash$   
 $(q_2, ca, DaZ) \vdash (q_2, ca, caZ) \vdash (q_2, a, aZ) \vdash$   
 $(q_2, \varepsilon, Z) \vdash (q_3, \varepsilon, Z)$**

# Latihan

## 1. Sebuah PDA

$$Q = \{q_1, q_2\} ; \Sigma = \{0, 1, 2\} ; \Gamma = \{Z, B, G\} ;$$

$$S = \{q_1, q_2\} ; Z = Z ; F = \emptyset$$

**PDA tersebut memiliki fungsi transisi:**

$$\begin{array}{ll} \Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\} & \Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\} & \Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\} & \Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\} \\ \Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\} & \Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\} \\ \Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\} & \Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\} \\ \Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\} & \Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\} \end{array}$$

**Tentukan apakah PDA diatas dapat menerima string '121'**

**Penyelesaian:**

Z
---

**1. Konfigurasi awal mesin:**

*state*  $q_1$ , *top-stack* Z,  
menerima input '1'.

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**

*state*  $q_1$  dan *push* G

G
Z

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

## 2. Membaca input '2'

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan *stack* tetap

<b>G</b>
<b>Z</b>

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

### 3. Membaca input '1'

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan  $G$  di *pop*

<b>Z</b>
----------

$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

#### 4. Tanpa membaca input ( $\epsilon$ )

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_2, \epsilon, Z) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan  $Z$  di *pop*

*Stack* kosong



$$\Delta(q_1, 0, Z) = \{(q_1, BZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB)\}$$

$$\Delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, Z) = \{(q_2, Z)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, B) = \{(q_2, B)\}$$

$$\Delta(q_1, 2, G) = \{(q_2, G)\}$$

$$\Delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \epsilon, Z) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, GZ)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$$

$$\Delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG)\}$$

$$\Delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \epsilon)\}$$



## Latihan 2

Sebuah tata bahasa bebas konteks,  $D \rightarrow aDa \mid bDb \mid c$   
PDA nya dapat dikonstruksi menjadi:

$$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$S = q_1$$

$$F = \{q_3\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{D, a, b, c, Z\}$$

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), (q_2, bDb), (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) = \Delta(q_2, c, c) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

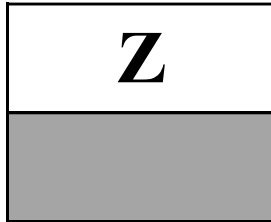
$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

**Dari aturan produksi yang ada, tata bahasa bebas konteks tersebut bisa menurunkan untai 'bcb' dari**

$$\mathbf{D \Rightarrow bDb \Rightarrow bcb}$$

**Karena tata bahasa bebas konteks bisa menurunkan *string* 'bcb', maka PDA juga harus dapat menerima untai tersebut.**

**Langkah pemeriksaan:**

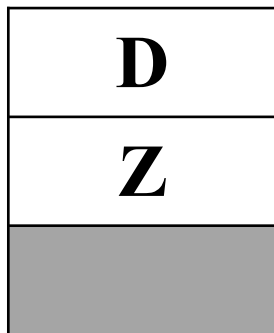


1. **Konfigurasi awal mesin:**  
*state*  $q_1$  , *top-stack*  $Z$ ,  
 tanpa menerima *input* ( $\varepsilon$ ).

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

**Konfigurasi mesin menjadi:**  
*state*  $q_2$  dan *push*  $D$



**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), (q_2, bDb), (q_2, c)\}$$

$$\begin{aligned} \Delta(q_2, a, a) &= \Delta(q_2, b, b) \\ &= \Delta(q_2, c, c) \\ &= \{(q_2, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

## 2. Tanpa menerima *input* ( $\varepsilon$ ).

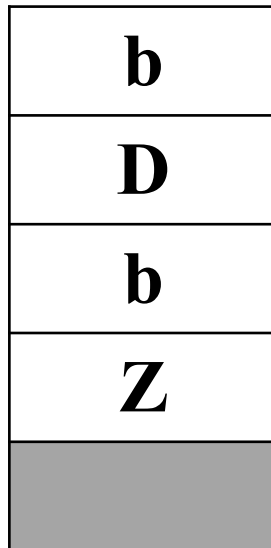
Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, \varepsilon, \mathbf{D}) = \{(q_2, \mathbf{bDb})\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$ ,

*pop top-stack push* 'bDb'



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, \mathbf{Z}) = \{(q_2, \mathbf{DZ})\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, \mathbf{D}) = \{(q_2, \mathbf{aDa}),$$
$$(q_2, \mathbf{bDb}),$$
$$(q_2, \mathbf{c})\}$$

$$\Delta(q_2, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \Delta(q_2, \mathbf{b}, \mathbf{b})$$
$$= \Delta(q_2, \mathbf{c}, \mathbf{c})$$
$$= \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, \mathbf{Z}) = \{(q_3, \mathbf{Z})\}$$

### 3. Menerima *input* 'b'

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, b, b) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$  , *pop top-stack*

<b>D</b>
<b>b</b>
<b>Z</b>

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

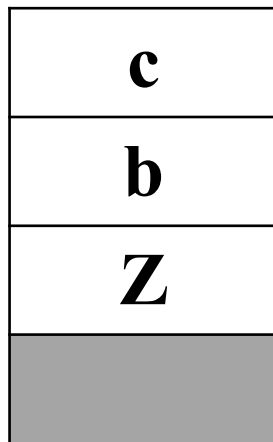
#### 4. Tanpa menerima *input* ( $\epsilon$ )

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, \epsilon, D) = \{(q_2, c)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$  , *pop top-stack*,  
*push c*



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \epsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \epsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \epsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \epsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

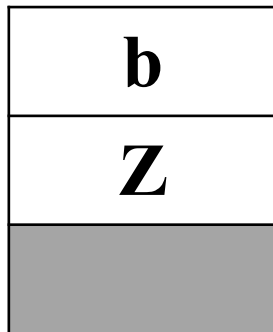
## 5. Menerima *input* 'c'

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, c, c) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$ , *pop top-stack*



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

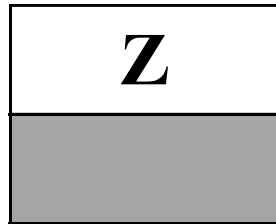
## 6. Menerima *input* 'b'

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, b, b) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_2$ , *pop top-stack*



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$



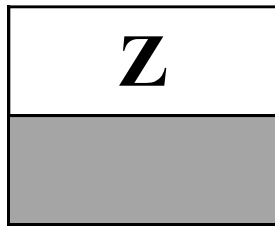
## 7. Tanpa menerima *input* ( $\varepsilon$ )

Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

Konfigurasi mesin menjadi:

*state*  $q_3$



Fungsi transisinya:

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), \\ (q_2, bDb), \\ (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) \\ = \Delta(q_2, c, c) \\ = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

Tidak ada transisi lagi dari  $q_3$  .

Karena  $q_3$  *state* akhir dan semua *input* sudah selesai dibaca, sehingga menandakan untai 'bcb' diterima oleh PDA tersebut.

**Fungsi transisinya:**

$$\Delta(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, DZ)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, D) = \{(q_2, aDa), (q_2, bDb), (q_2, c)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \Delta(q_2, b, b) = \Delta(q_2, c, c) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_3, Z)\}$$

**Latihan 3:**

**Kerjakan latihan 2, dengan deskripsi seketika.**

$$(q_1, bcb, Z) \vdash (q_2, bcb, DZ) \vdash (q_2, bcb, bDbZ) \vdash$$

$$(q_2, cb, DaZ) \vdash (q_2, cb, cbZ) \vdash (q_2, b, bZ) \vdash$$

$$(q_2, \varepsilon, Z) \vdash (q_3, \varepsilon, Z)$$