PERTEMUAN 13

KALKULUS DASAR

Program Studi Informatika
Universitas Indraprasta PGRI

INTEGRAL TEKNIK SUBTITUSI 2

Begitu banyak integral trigonometri yang penyelesaiannya dengan teknik substitusi II. Pada bab ini hanya dibahas yang mengena untuk trigonometri sin dan cos pangkat ganjil dan genap.

A. Strategi untuk menghitung: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

1. Jika pangkat dari cosines adalah bilangan ganjil $n = 2k + 1$, maka simpan satu faktor cosinus dan gunakan formula $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ untuk menyatakan faktor yang tersisa dalam sinus, yaitu:

$$\int [\sin^m x \cos^{2k+1} x] \, dx = \int \left[[\sin^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x]\right] dx$$

$$= \int \left[[\sin^m x \ (1 - \sin^2 x)^k \cos x]\right] dx$$

Kemudian substitusikan $u = \sin x$

2. Jika pangkat dari sinus adalah bilangan ganjil $m = 2k + 1$, maka simpan satu faktor sinus dan gunakan formula $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ untuk menyatakan faktor yang tersisa dalam cosinus, yaitu:

$$\int [\sin^{2k+1} x \cos^n x] \, dx = \int [(\sin^2 x)^k \sin x \cos^n x] \, dx$$

$$= \int [(1 - \cos^2 x)^k \sin x \cos^n x] \, dx$$

$$= \int [(1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x] \, dx$$

Kemudian substitusikan $u = \cos x$

3. Jika pangkat dari sinus maupun cosinus adalah bilangan ganjil, maka salah satu dari a dan b dapat digunakan.
4. Jika pangkat dari sinus maupun cosinus adalah bilangan genap, maka gunakan kesamaan sudut paruh berikut ini!

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin 2x = 2 \ \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Contoh 1

$$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$$

$$= \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x) \sin x\,dx$$

Misal $u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$d(\cos x) = -\sin x\,dx$

$\sin x\,dx = -d(\cos x)$

$$= \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x). -d(\cos x)$$

$$= -\int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x) d(\cos x)$$

$$= -\left[\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\right] + C$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Contoh 2

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx$$

$$= \int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x) \cos x\,dx$$

Misal $u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

$d(\sin x) = \cos x\,dx$

$$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^2 x) d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

Contoh 3

$$\int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]+C$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

Contoh 4

$$\int \sin^3 x \cos^{-4} x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^{-4} x \, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x) \sin x \cos^{-4} x \, dx$$

$$= \int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x) \sin x \, dx$$

Misal : $u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$d(\cos x) = -\sin x \, dx$

$\sin x \, dx = -d(\cos x)$

$$= \int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)(-d(\cos x))$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}\cos^{-3} x + \cos^{-1} x + C\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cos^{-3} x - \cos^{-1} x - c$$

Contoh 5

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \sin^2 x \, (\cos^2 x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1+2\cos 2x+\cos^2 2x-\cos 2x-2\cos^2 2x$$

$$-\cos^3 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x \;\; dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x-\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right.$$

$$\left.-(1-\sin^2 2x)(\cos 2x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x-\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{2}-\cos 2x\right.$$

$$\left.+\sin^2 2x\cos 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{2}+\sin^2 2x\cos 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}x\, dx-\frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx+\int \sin^2 2x\cos 2x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\cos 2x\, d(2x)\right]$$

Misal: $u = \sin 2x$

$du = \cos 2x \, d(2x)$

$d(\sin 2x) = \cos 2x \, d(2x)$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\sin^3 2x\right]+C$$

$$= \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

B. Latihan Soal

1.	$\int [\sin^3 x \cos^5 x]\, dx$	11.	$\int [\sin^5 x \cos^6 x]\, dx$
2.	$\int [\sin^4 x \cos^2 x]\, dx$	12.	$\int [\sin^2 x \cos x]\, dx$
3.	$\int \left[\cos^3 x \sin^{\frac{5}{2}} x\right] dx$	13.	$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$
4.	$\int [\sin^3 x \sqrt{\cos x}]\, dx$	14.	$\int \sin^3 x \cos^5 x\, dx$
5.	$\int [\sin^6 x \cos^4 x]\, dx$	15.	$\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx$
6.	$\int [\sin^5 x \cos^7 x]\, dx$	16.	$\int \cos^2 x \sin x\, dx$
7.	$\int \sin 5x \sin 2x\, dx$	17.	$\int \cos 8x \sin 4x\, dx$
8.	$\int \sin 3x \cos 2x\, dx$		
9.	$\int \cos 7x \cos 4x\, dx$		
10.	$\int \cos 5x \cos 12x\, dx$		