



Peubah Acak dan Nilai Harapan

Peubah Acak (*Random Variable*)

Definisi :

Peubah acak atau *variabel random* ialah suatu fungsi yang memetakan setiap unsur dalam ruang sampel pada suatu bilangan real.

Catatan:

- Peubah acak ditulis dengan huruf besar (X) sedangkan nilainya ditulis dengan huruf kecil (x).
- Setiap nilai dari peubah acak memiliki peluang tertentu atau presentase nilai tertentu yang terkait.

Ilustrasi 1

Dilakukan sebuah eksperimen melempar sebuah uang logam.



Peubah acak X menyatakan banyaknya **Gambar** yang muncul bila satu koin dilempar. Tentukan nilai x yang mungkin dari peubah acak X ?

Solusi:

Peubah acak X menyatakan banyaknya **Gambar** yang muncul. Sedangkan x adalah nilai dari peubah acak.

Ruang Sampel

$$S = \{A, G\}$$



Nilai x yang mungkin muncul

$$x = 0$$



$$x = 1$$

Ilustrasi 2

Suatu sampel random berukuran tiga dipilih dari hasil produksi suatu mesin. Kita ingin mengkuantifikasikan hasil pengamatan berdasarkan hasil yang dicapai menurut kategori tertentu misal "Baik" atau "Cacat" dari produksi tersebut.

Bila B menyatakan 'baik' dan C menyatakan 'cacat'. Peubah acak X menyatakan banyaknya cacat yang terjadi.

Tentukan nilai x yang mungkin dari peubah acak X .

Solusi

Ruang sampel yang memberikan secara rinci setiap kemungkinan hasil bila tiga hasil produksi dapat ditulis sebagai

$$S = \{BBB, BBC, BCB, BCC, CBB, CBC, CCB, CCC\}$$

Solusi

Nilai x yang mungkin dari peubah acak X diberikan tabel berikut:

Ruang sampel	x
BBB	0
BBC	1
BCB	1
BCC	2
CBB	1
CBC	2
CCB	2
CCC	3

Klasifikasi Peubah Acak

Berdasarkan nilainya, peubah acak diklasifikasikan:

- a. **Peubah Acak Diskrit** : Peubah acak yang nilai-nilainya berhingga banyaknya atau berisi sederetan anggota yang banyaknya sebanyak integer.

Contoh :

- a. Banyaknya pemunculan sisi muka atau angka dalam pelemparan sebuah koin.
- b. Jumlah anak dalam sebuah keluarga.

Klasifikasi Peubah Acak

b. **Peubah Acak Kontinu** : Peubah acak yang nilai-nilainya tak berhingga banyaknya atau berisi sederetan anggota yang banyaknya sebanyak titik dalam sebuah garis.

Contoh:

- a. Usia penduduk suatu daerah
- b. Panjang beberapa helai kain

- Diketahui bahwa setiap nilai dari peubah acak memiliki peluang tertentu atau presentase nilai tertentu yang terkait.
- Sehingga berapa peluang berapa peluang $X = 0$ atau $X = 1$ pada **ilustrasi 1**?

	Gambar yang muncul	
Kejadian	A	G
X	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Distribusi Peluang Diskrit

Definisi :

Andaikan X suatu peubah acak diskrit dan f suatu fungsi, maka himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu fungsi peluang atau distribusi peluang peubah acak diskrit X bila untuk setiap kemungkinan hasil x .

1. $f(x) \geq 0$

2. $\sum_x f(x) = 1$

3. $P(X = x) = f(x)$

Ilustrasi 3

Peubah acak X menyatakan jumlah mobil terjual dalam sehari menurut jumlah hari selama 300 hari.

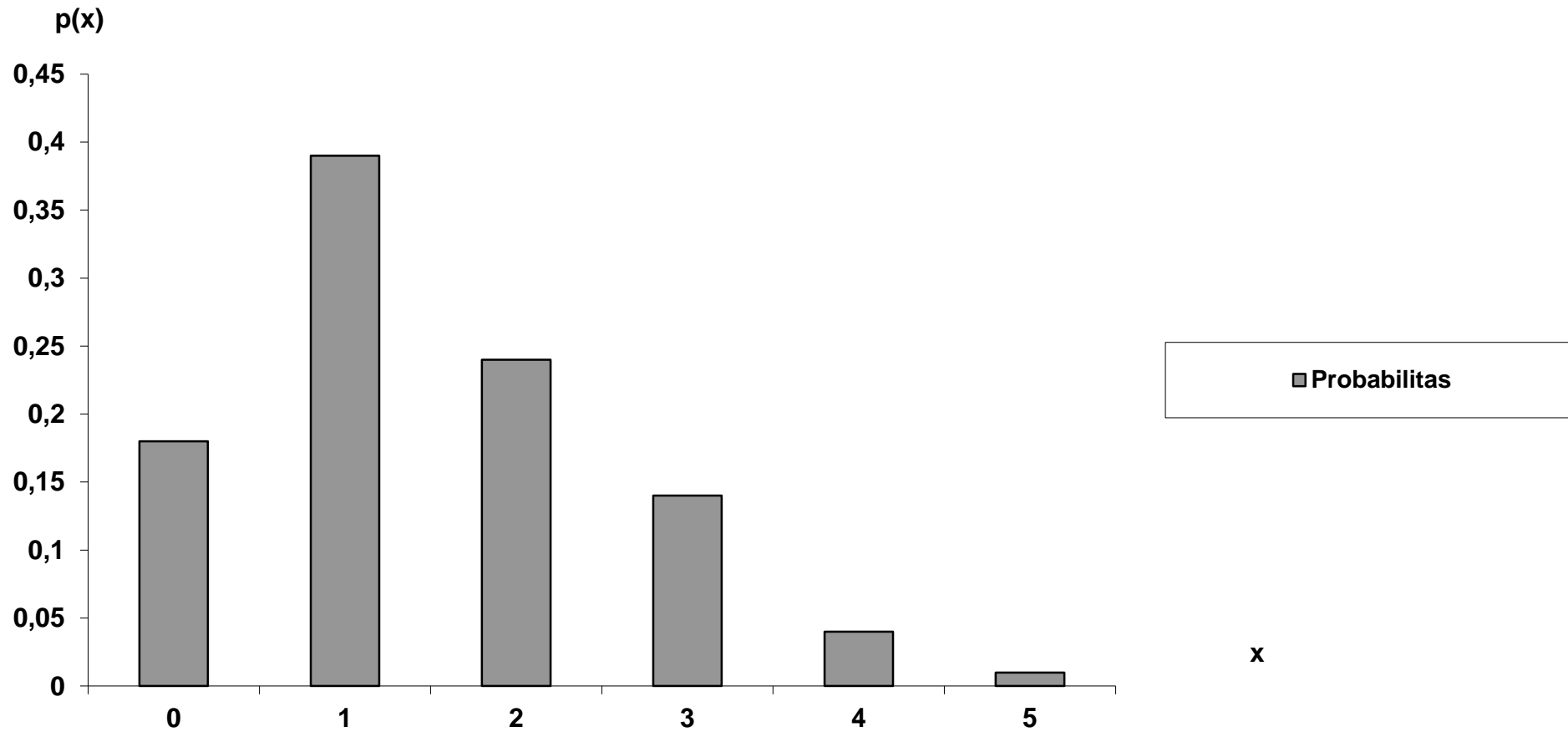
Jumlah mobil terjual dalam sehari	Jumlah hari
0	54
1	117
2	72
3	42
4	12
5	3
Total	300

Solusi

Tentukan distribusi probabilitas jumlah mobil terjual dalam sehari menurut jumlah hari selama 300 hari.

X	$P(x)$
0	0,18
1	0,39
2	0,24
3	0,14
4	0,04
5	0,01
Total	1,00

Solusi



Ilustrasi 4

Suatu pengiriman 8 komputer PC yang sama ke suatu toko mengandung 3 yang cacat. Bila suatu sekolah membeli 2 komputer ini secara acak, cari distribusi peluang banyaknya yang cacat.



8 computer PC terdapat 3 yang cacat

Dibeli 2 Komputer PC

Solusi

Misalkan X peubah acak diskrit yang menyatakan banyaknya komputer yang cacat dan dibeli sekolah tersebut.

Nilai x yang mungkin adalah 0,1 dan 2.

Banyak titik sampel dalam ruang sampel adalah

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solusi

Banyaknya cara memilih x (banyaknya komputer yang cacat) dari 3 komputer yang cacat adalah

$$\binom{3}{x}$$

Sedangkan banyaknya cara memilih $2-x$ (banyaknya komputer yang tidak cacat) dari 5 komputer yang tidak cacat adalah

$$\binom{5}{2-x}$$

Solusi

Maka distribusi peluang banyaknya komputer yang cacat adalah

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x} \binom{5}{2-x}}{\binom{8}{2}}$$

untuk $x = 0, 1$ dan 2

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = 10/28$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = 15/28$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = 3/28$$

Fungsi Distribusi Kumulatif Peubah Acak Diskrit

Definisi:

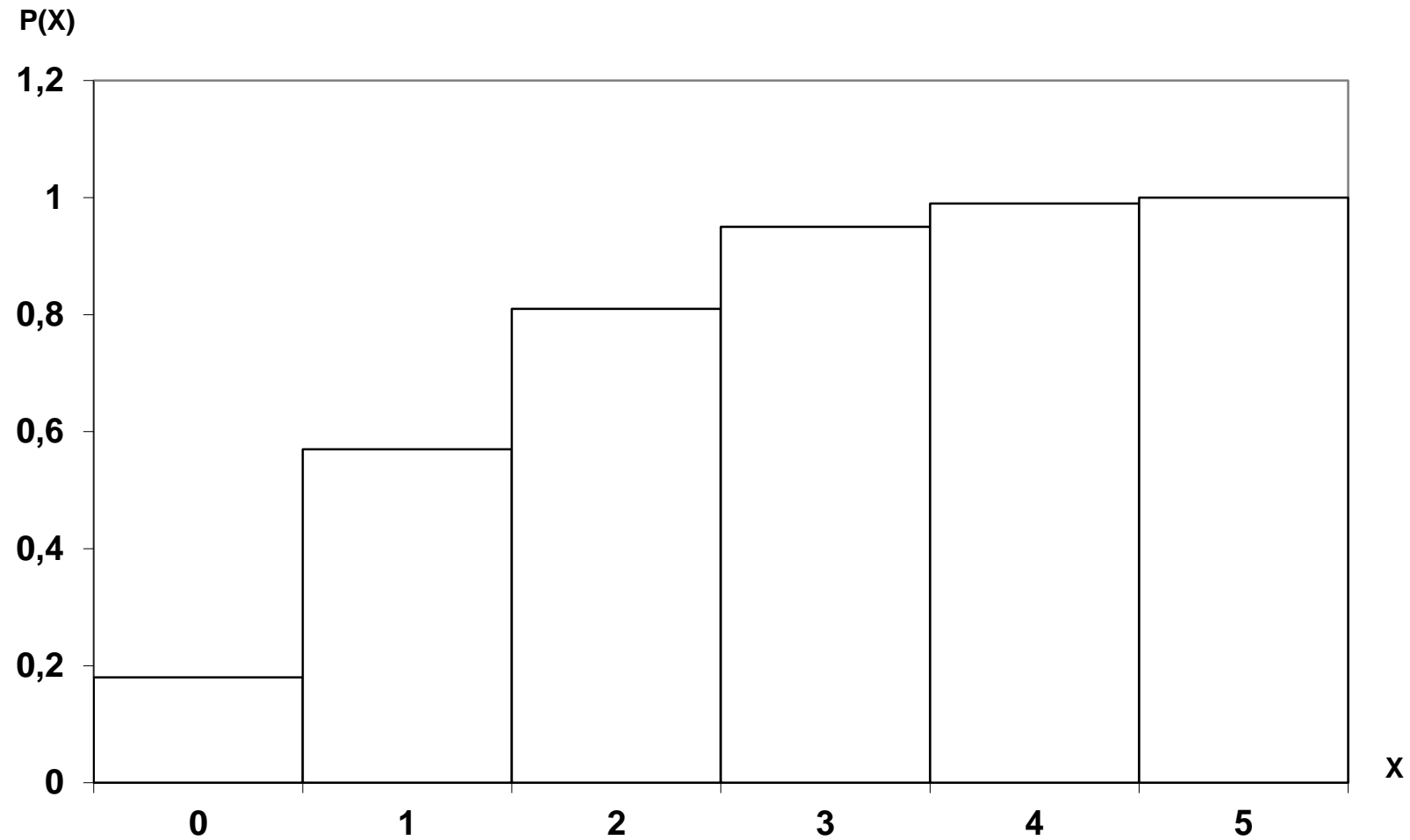
Distribusi kumulatif $F(x)$ suatu peubah acak diskrit X dengan distribusi peluang $f(X)$ dinyatakan oleh

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \text{untuk} \quad -\infty < X < \infty$$

Ilustrasi 5

X	$F(x)$
0	0,18
1	0,57 (=0,18+0,39)
2	0,81 (=0,18+0,39+0,24)
3	0,95 (=0,18+0,39+0,24+0,14)
4	0,99 (=0,18+0,39+0,24+0,14+0,04)
5	1,00 (=0,18+0,39+0,24+0,14+0,04+0,01)

Solusi



Ilustrasi 6

Untuk peubah acak X : banyaknya komputer yang cacat pada contoh sebelumnya, tentukanlah distribusi kumulatif dari peubah acak X !

Solusi

Dari penyelesaian contoh sebelumnya, diperoleh distribusi peluang banyaknya komputer yang cacat adalah

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x} \binom{5}{2-x}}{\binom{8}{2}}$$

untuk $x=0,1$ dan 2 .

Sehingga

Solusi

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

Jadi distribusi kumulatif $F(x)$ adalah

$$F(0) = f(0) = 10/28$$

$$F(1) = f(0) + f(1)$$

$$= 10/28 + 15/28$$

$$= 25/28$$

$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$= 10/28 + 15/28 + 3/28$$

$$= 1$$

Distribusi Peluang Kontinu

Definisi:

Fungsi $f(X)$ adalah fungsi padat peluang peubah acak kontinu yang didefinisikan atas himpunan bilangan real R bila

1. $f(X) \geq 0$ Untuk semua $X \in R$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(X)dX = 1$

3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(X)dX$

Ilustrasi 7

Misalkan suatu peubah acak X mempunyai fungsi padat peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{yanglain} \end{cases}$$

Hitunglah $P(0 < x \leq 1)$

Solusi

$$\begin{aligned} P(0 < x \leq 1) &= \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{9} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Distribusi Kumulatif P.a Kontinu

Definisi:

Distribusi kumulatif $F(X)$ suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi padat $f(X)$ diberikan oleh

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{untuk} \quad -\infty < X < \infty$$

NILAI HARAPAN

Nilai Harapan Peubah Acak Diskrit

Nilai x yang mungkin dari peubah acak x diberikan tabel berikut:

Ruang sampel	x
BBB	0
BBC	1
BCB	1
BCC	2
CBB	1
CBC	2
CCB	2
CCC	3

Nilai Harapan Peubah Acak Diskrit

Nilai harapan dari peubah acak adalah pemusatan dari nilai peubah acak jika percobaannya dilakukan secara berulang-ulang sampai tak berhingga kali. Nilai harapan dari perubah acak X , $E(X)$, dalam statistik dikenal juga sebagai **rata-rata** μ .

Secara matematis nilai harapan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i), \text{ jika } X \text{ p.a diskrit}$$

Sifat-sifat nilai harapan:

Jika c konstanta maka $E(c) = c$.

Jika p.a. X dikalikan dengan konstanta c maka $E(cX) = c E(X)$

Jika X dan Y peubah acak

maka $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Varians Peubah Acak

Varians dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) = \sigma^2 &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Sifat-sifat dari varians

- Jika c konstanta maka $\text{Var}(c) = 0$.
- Jika p.a. X dikalikan dengan konstanta c maka $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$.
- Jika X dan Y peubah acak maka,
$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm \text{Cov}(X, Y)$$

dimana: $\text{Cov}(X, Y) = E(X - E(X))E(Y - E(Y))$, Jika X dan Y saling bebas maka $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Ilustrasi 8

Jika diketahui distribusi peluang dari peubah acak X seperti tabel di bawah

	Nilai peubah Acak X					
X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$X_i p(x_i)$	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6

Tentukan nilai harapan p.a X adalah:

- $E(X) = \sum_1^6 x_i p(x_i) = 0 + 1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 = 15/6$
- $E(3X) = 3 E(X) = 45/6$

Tentukan varian p.a X adalah:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) = \sigma^2 &= (0 + 1/6 + 4/6 + 9/6 + 16/6 + 25/6) - \left(\frac{15}{6}\right)^2 \\ &= 55/6 - 225/36 = 2,9167\end{aligned}$$

Simpangan baku

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{2,9167} = 1,7078$$

Ilustrasi 9

Sekelompok ahli sebuah perusahaan terdiri dari 4 orang ahli manajemen dan 3 orang ahli akuntansi. Akan dibentuk suatu komisi yang terdiri atas 3 orang (komisi 3). Jika anggota komisi tiga diambil secara acak dari ke-7 ahli tersebut. Tentukan a. nilai harapan banyaknya ahli manajemen yang dapat duduk dalam komisi tiga tersebut. b. Tentukan $Var(X)$ dan simpangan bakunya!

Solusi:

Misalkan x adalah banyaknya ahli manajemen dalam komisi tiga maka variabel acak x dapat memiliki nilai 0,1,2,3. Distribusi probabilitas dari variabel x dapat dihitung dengan menggunakan pendekatan kombinasi.

$$f(x) = \frac{C_x^4 C_{3-x}^3}{C_3^7}, \quad x = 0,1,2,3$$

$$f(0) = \frac{1}{35}$$

$$f(1) = \frac{12}{35}$$

$$f(2) = \frac{18}{35}$$

$$f(3) = \frac{4}{35}$$

Distribusi probabilitasnya adalah :

	Nilai peubah Acak X			
X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/35	12/35	18/35	4/35
$X_i p(x_i)$	0	12/35	36/35	12/35

Tentukan nilai harapan p.a X adalah:

Maka nilai harapan banyaknya ahli manajemen yang dapat duduk dalam komisi tiga tersebut adalah :

$$E(x) = \sum x \cdot p(x) = 0 + \frac{12}{35} + \frac{36}{35} + \frac{12}{35} = \frac{60}{35} = 1,7$$

Dari hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa andaikan komisi tiga itu dibentuk berulang-ulang maka diharapkan banyaknya ahli manajemen dalam setiap komisi yang terbentuk adalah 1,7 atau 2 orang (sebagai pendekatan).

Tentukan varian p.a X adalah:

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot p(x) = 0\left(\frac{1}{35}\right) + 1\left(\frac{12}{35}\right) + 4\left(\frac{18}{35}\right) + 9\left(\frac{4}{35}\right) = \frac{120}{35} = 3.43$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3.43 - (1,7)^2 = 3.43 - 2.89 = 0.54$$

Tentukan simpangan baku p.a X adalah:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.54} = 0.73$$

Nilai Harapan Peubah Acak Kontinu

Nilai harapan dari peubah acak tersebut dalam jangka panjang. Secara matematis nilai harapan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_i) dx, \text{ jika } X \text{ p.a kontinu}$$

Ilustrasi 10

Hitunglah harapan umur dan varians dari bolam lampu, jika diketahui bahwa X perubah acak yang menyatakan umur (dalam jam) dari bolam lampu, yang dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20.000}{x^3} & ; \quad x > 100 \\ 0 & ; \quad \text{untuk } x \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

Solusi:

Menurut definisi

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \int_{100}^{\infty} x \left(\frac{20.000}{x^3} \right) dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20.000}{x^2} dx \\ &= -\frac{20.000}{x} \Big|_{100}^{\infty} = 200\end{aligned}$$

Jadi bolam lampu tersebut dapat diharapkan (rata-ratanya) berumur 200 jam

Tentukan varians p.a X adalah:

$$E(X^2) = \int_{100}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx = \int_{100}^{\infty} x^2 \cdot \left(\frac{20.000}{x^3} \right) dx = \int_{100}^{\infty} \left(\frac{20.000}{x} \right) dx = 20.000 \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x} dx = 20.000 \ln(x) \Big|_{100}^{\infty} = 92.103,40$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 92.103,40 - (200)^2 = 92.103,40 - 40.000 = 52.103,4$$

Perhitungan dengan Matlab

Soal kasus pada Ilustrasi 8

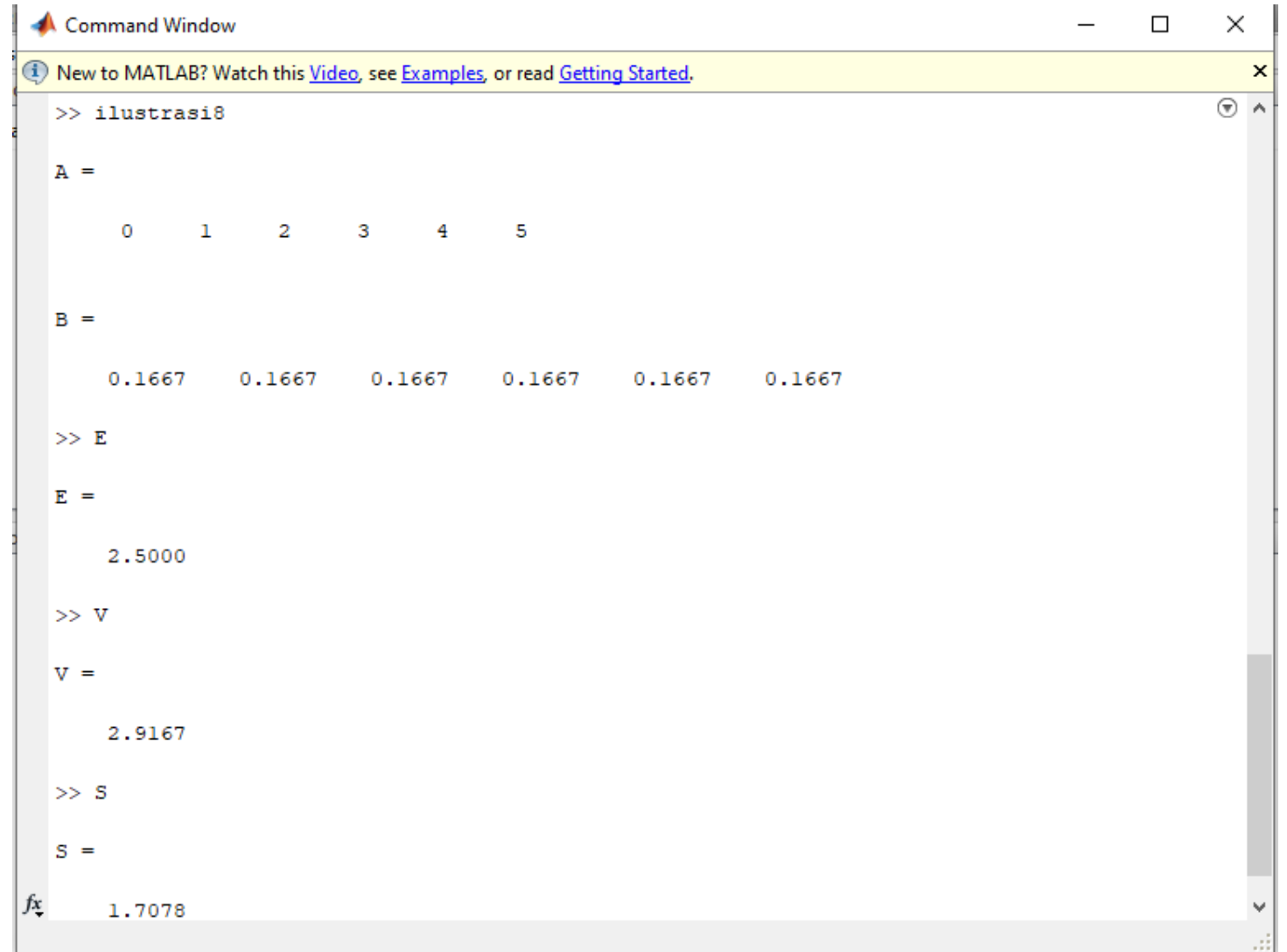
```
%input nilai
A = [0 1 2 3 4 5];
B = [1/6 1/6 1/6 1/6 1/6 1/6];

%nilai harapan
E = dot(A,B);

%varians
E_2 = dot(A.^2,B);
V = E_2 - E.^2;

%simpangan baku
S = sqrt(V);

display(A);
display(B);
```



```
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Examples, or read Getting Started.
>> ilustrasi8
A =
     0     1     2     3     4     5
B =
    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667    0.1667
>> E
E =
    2.5000
>> V
V =
    2.9167
>> S
S =
    1.7078
```

TERIMA KASIH