Pengujian Hipotesis Rata-Rata, Proporsi dan Varians

Uji Hipotesis Rata-rata

Uji Hipotesis Rata-Rata adalah pengujian mengenai hipotesis rata-rata suatu populasi yang didasarkan atas informasi sampelnya.

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Rata-rata

1. Rumuskan Hipotesis

a. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_A : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\}$ (pengertian sama/uji 2 pihak)

$H_A : \mu > \mu_0$

$H_A : \mu < \mu_0$

b. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_A : \mu > \mu_0 \end{array}\right\}$ (uji 1 pihak kanan/ pengertian max)

c. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_A : \mu < \mu_0 \end{array}\right\}$ (uji 1 pihak kiri/ pengertian min)

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Rata-rata

2. Perhitungan Z stat dan t stat

Perhitungan Z stat:

- bila populasinya terbatas (N dan n diketahui nilainya) dan $\frac{n}{N} > 0{,}05$,

  gunakan faktor koreksi $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

- **bila populasinya terbatas (N dan n diketahui nilainya) dan $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$ atau bila populasinya tidak terbatas (N tidak diketahui nilainya)**

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Rata-rata

Bila standar deviasi populasi (σ) tidak diketahui dapat diganti dengan standar deviasi sampelnya (s).

Perhitungan t stat:

- bila populasinya terbatas (N dan n diketahui nilainya) dan $\frac{n}{N} > 0{,}05$, gunakan faktor koreksi $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}; df = n - 1$$

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Rata-rata

- bila populasinya terbatas (N dan n diketahui nilainya) dan $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$ atau

  bila populasinya tidak terbatas (N tidak diketahui nilainya)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}; df = n - 1$$

Bila standar deviasi populasi (σ) tidak diketahui dapat diganti dengan standar deviasi sampelnya (s).

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Rata-rata

3. Menentukan batas daerah penerimaan dan penolakan:

a. $n > 30$, tentukan nilai Z table

$Z_{1/2\alpha} = \frac{1-\alpha}{2}$ $Z_{\alpha} = 0.5 - \alpha$

Ket : $Z_{1/2\alpha} =$ Z table untuk uji 2 pihak

$Z_{\alpha} =$ Z table untuk uji 1 pihak

$n \leq 30$, tentukan nilai t table dengan derajat kebebasan (*degree of freedom*/df)

$t_{1/2\alpha} =$ t table untuk uji 2 pihak

$t_{\alpha} =$ t table untuk uji 1 pihak

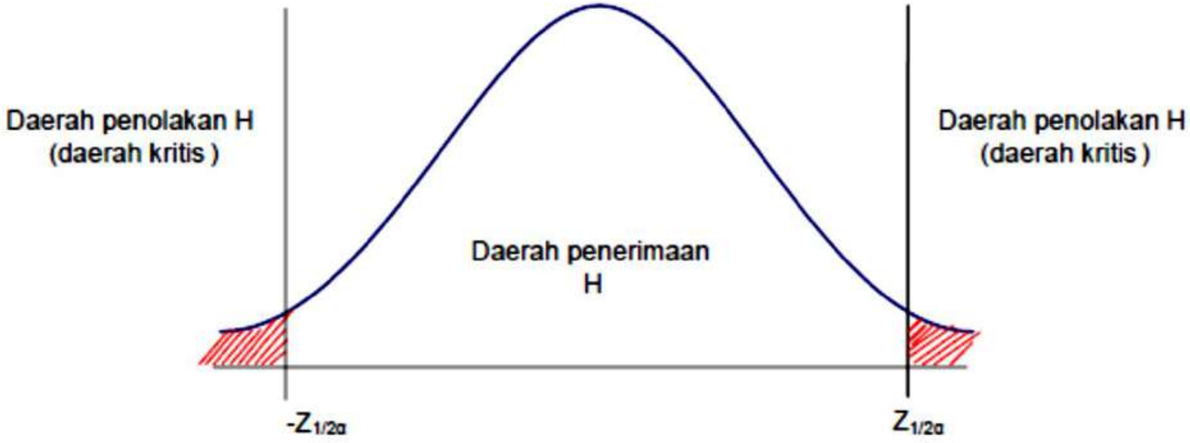
$df = n - 1$

b. Gunakan α (tingkat signifikasi)

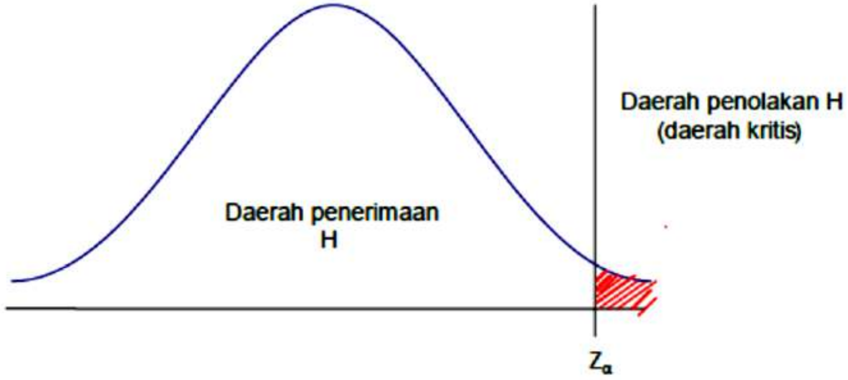
c. Gambarkan daerah penolakan dan penerimaan hipotesis nol berdasarkan langkah 1

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Rata-rata

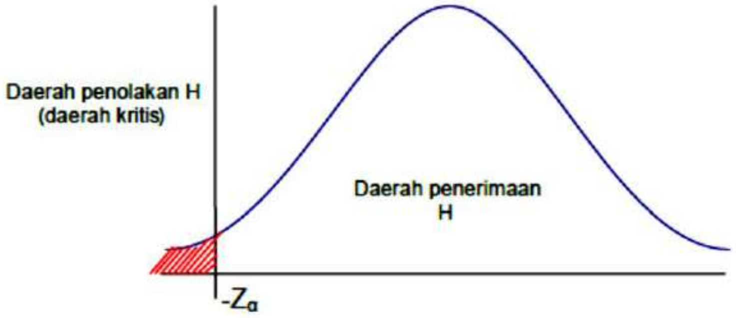
i. Uji 2 pihak



ii. Uji 1 pihak kanan



iii. Uji 1 pihak kiri



Keterangan :

Daerah yang diasir adalah daerah penolakan Ho dan untuk n ≤ 30, Z diganti dengan t.

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Rata-rata

4. Menentukan kriteria penerimaan atau penolakan

(1) Untuk uji 2 pihak : $Z < -Z_{\alpha/2}$ atau $Z > Z_{\alpha/2} \rightarrow$ Ho ditolak

Jika $-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2} \rightarrow$ Ho tidak dapat ditolak

(2) Uji 1 pihak kanan : $Z > Z_{\alpha}$, H_o ditolak

$Z \leq Z_{\alpha}$, H_o tidak dapat ditolak

(3) Uji 1 pihak kiri : $Z < -Z_{\alpha}$ H_o ditolak

$Z \geq -Z_{\alpha}$ H_o tidak dapat ditolak

Nilai Z diganti dengan t jika $n \leq 30$.

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Rata-rata

5. Bandingkan nilai Z atau t (yang diperoleh pada tahap 2) dengan Z atau t table serta simpulkan apakah Ho tidak dapat ditolak atau ditolak berdasarkan kriteria penerimaan/penolakan.
6. Membuat kesimpulan secara komprehensif/lengkap

Ilustrasi 1

Berat dari buku yang diproduksi oleh PT X memiliki rata-rata 1900 gram dengan standar deviasi 100 gram. Dengan menggunakan teknik produksi baru, PT X mengklaim bahwa berat buku dapat dikurangi. Untuk menguji klaim ini, diambil sampel sebanyak 50 buah buku, dan diketahui bahwa rata-rata berat buku adalah 1850 gram. Dapatkan klaim dari PT X dibenarkan pada tingkat signifikansi 5%?

Solusi

Dik : $n = 50$ $\alpha = 5\%$

$\bar{x} = 1850$ $\sigma = 100$

1. Ho : $\mu = 1900$

   Ha : $\mu < 1900$

2. $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1850-1900}{100/\sqrt{50}}$ = -3,535

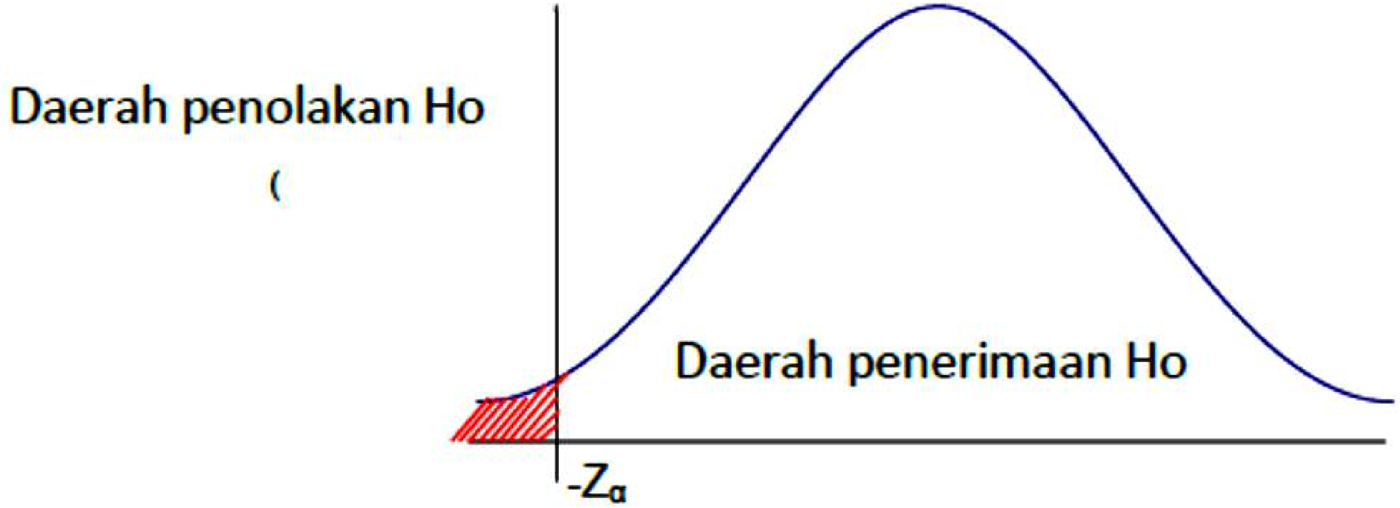
3. Z_{α} = 1,645

4. Kriteria Uji : Uji 1 pihak kiri : $Z < -Z_{\alpha}$ H_o ditolak

   $Z \geq -Z_{\alpha}$ $H_o$tidak dapat ditolak

Solusi

5.



6. Ternyata -3,535 < 1,645, maka H_0 ditolak
7. Kesimpulan : Pada tingkat signifikansi 1%, klaim PT X mengenai berat buku dapat dikurangi dengan menggunakan teknik produksi baru adalah benar.

Uji Hipotesis Proporsi

Uji Hipotesis Proporsi adalah pengujian hipotesis mengenai proporsi/perbandingan suatu populasi yang didasarkan atas informasi sampelnya.

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Proporsi π

a. Rumuskan Hipotesis

a. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \pi = \pi_0 \\ H_A : \pi \neq \pi_0 \end{array}\right\}$ (uji 2 pihak)

$H_A : \pi > \pi_0$

$H_A : \pi < \pi_0$

b. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \pi \leq \pi_0 \\ H_A : \pi > \pi_0 \end{array}\right\}$ (uji 1 pihak kanan/ pengertian max)

c. $\left.\begin{array}{l} H_0 : \pi \geq \pi_0 \\ H_A : \pi < \pi_0 \end{array}\right\}$ (uji 1 pihak kiri/ pengertian min)

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Proporsi π

2) Perhitungan Z stat dan t stat (Z hitung atau t hitung)

Perhitungan Z stat:

- bila populasinya terbatas (N dan n diketahui nilainya) dan $\frac{n}{N} > 0{,}05$, gunakan faktor koreksi $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$Z = \frac{\left(\frac{x}{n}\right) - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Proporsi π

- bila populasinya terbatas (N dan n diketahui nilainya) dan $\frac{n}{N} \le 0{,}05$ atau bila populasinya tidak terbatas (N tidak diketahui nilainya)

$$Z = \frac{x/n - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Ket : x/n = proporsi sampel

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Proporsi π

π = proporsi populasi

Perhitungan t stat:

- bila populasinya terbatas (N dan n diketahui nilainya) dan $\frac{n}{N} > 0{,}05$,

  gunakan faktor koreksi $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

$$t = \frac{\left(\frac{x}{n}\right) - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

- bila populasinya terbatas (N dan n diketahui nilainya) dan $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$ atau bila

  populasinya tidak terbatas (N tidak diketahui nilainya)

$$t = \frac{\left(\frac{x}{n}\right) - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}\ ;\ df : n - 1$$

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Proporsi π

3) Menentukan batas daerah penerimaan dan penolakan

a. $n > 30$, tentukan nilai Z table

$Z_{1/2\alpha} = \frac{1-\alpha}{2}$ $\qquad$ $Z_{\alpha} = 0.5 - \alpha$

Ket : $Z_{1/2\alpha} =$ Z table untuk uji 2 pihak

$Z_{\alpha} =$ Z table untuk uji 1 pihak

$n \leq 30$, tentukan nilai t table dengan derajat kebebasan (*degree of freedom*/df)

$t_{1/2\alpha} =$ t table untuk uji 2 pihak

$t_{\alpha} =$ t table untuk uji 1 pihak

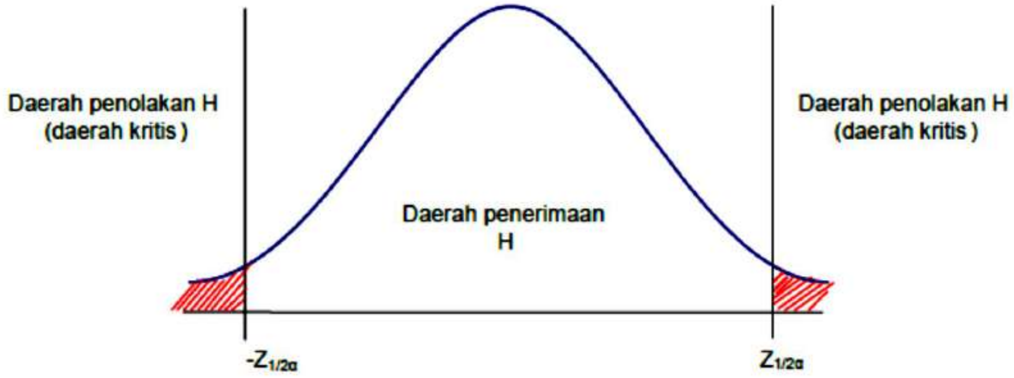
df = n -1

a. Gunakan tingkat signifikansi (α)

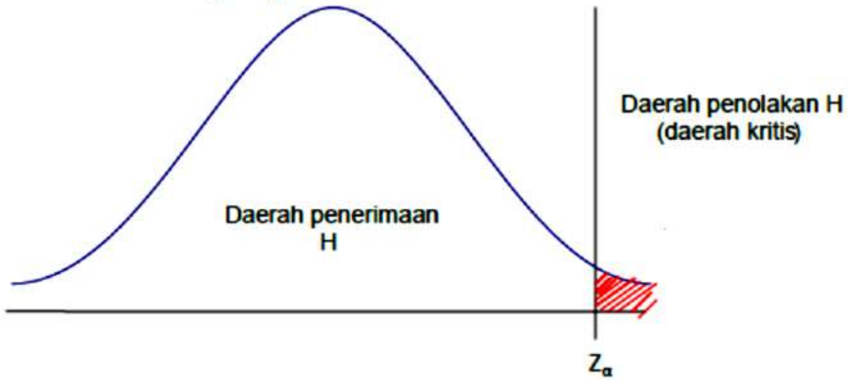
b. Gambarkan daerah penolakan dan penerimaan hipotesis nol berdasarkan langkah 1.

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Proporsi π

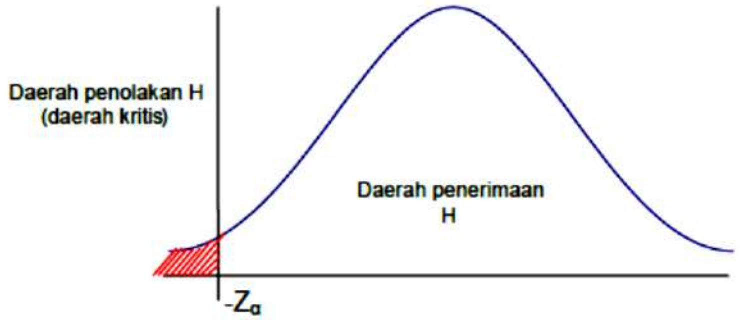
i. Uji 2 pihak



ii. Uji 1 pihak kanan



iii. Uji 1 pihak kiri



Langkah-Langkah Uji Hipotesis Proporsi π

Keterangan :

Daerah yang diasir adalah daerah penolakan Ho dan untuk n ≤ 30, Z diganti dengan t.

4. Menentukan kriteria penerimaan atau penolakan

(1) Untuk uji 2 pihak : $Z < -Z_{\alpha/2}$ atau $Z > Z_{\alpha/2}$ →Ho ditolak

Jika $-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}$ → Ho tidak dapat ditolak

(2) Uji 1 pihak kanan : $Z > Z_{\alpha}$, H_o ditolak

$Z \leq Z_{\alpha}$, H_o tidak dapat ditolak

(3) Uji 1 pihak kiri : $Z < -Z_{\alpha}$ H_o ditolak

$Z \geq -Z_{\alpha}$ H_o tidak dapat ditolak

Nilai Z diganti dengan t jika n ≤ 30.

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Proporsi π

5. Bandingkan nilai Z atau t (yang diperoleh pada tahap 2) dengan Z atau t table serta simpulkan apakah Ho tidak dapat ditolak atau ditolak berdasarkan kriteria penerimaan/penolakan.

6. Membuat kesimpulan secara komprehensif/lengkap

Ilustrasi 2

Para dosen di suatu perguruan tinggi sangat yakin bahwa dengan adanya praktikum maka nilai akhir mahasiswa akan meningkat. Pada tahun 2011 dari 30 kelas yang mengikuti praktikum, sebanyak 26 kelas menunjukan peningkatan nilai dan 4 kelas lainnya mengalami penurunan. Dari data tersebut ujilah pernyataan bahwa 90% lebih kelas mengalami peningkatan nilai dengan taraf nyata 5%!

Solusi

Dik : $x = 26$ $\alpha = 5\%$ $\pi = 90\%$ $n = 30$

Dit : Ujilah pernyataan tersebut

1. $H_0 : \pi \geq 0.9$

   $H_A : \pi < 0.9$

2. $t = \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right) - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \dfrac{(26/30) - 0{,}90}{\sqrt{\frac{0.90 \,\square\, 0{,}10}{30}}}$

   $t = -\,0{,}6086$

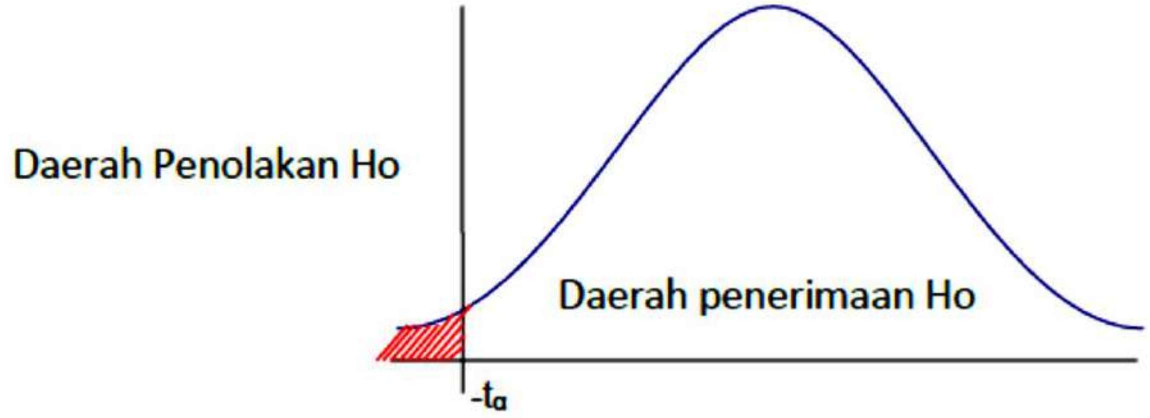
3. $t\alpha \longrightarrow$ df : $n - 1 = 29$ Lihat table t; maka $t\alpha = 1{,}6991$

   $\alpha = 0{,}05$

Solusi

4. Kriteria uji : Uji 1 pihak kiri : $t < t_\alpha$, H_0 ditolak

$t \geq t_\alpha$, H_0 tidak dapat ditolak



5. Ternyata : - 0,6086> -1,6691; maka $t > t_\alpha$, H_0 tidak dapat ditolak

Kesimpulan : Dengan tingkat signifikansi 5%, maka pernyataan bahwa bahwa 90% lebih kelas mengalami peningkatan nilai adalah benar.

Uji Hipotesis Varians

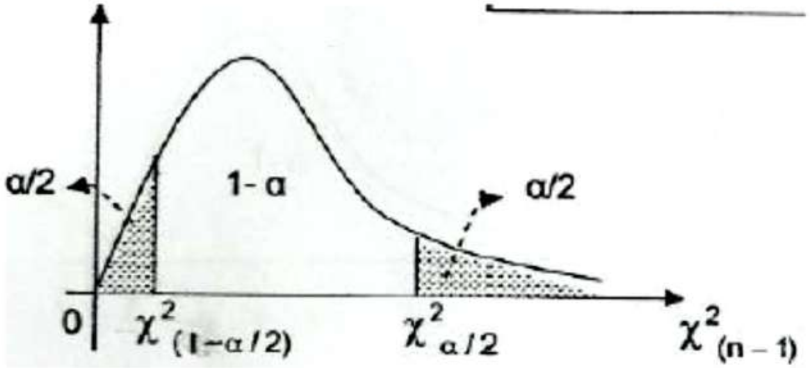
Uji Hipotesis Varians adalah menguji hipotesis mengenai keseragaman suatu populasi ataupun barang membandingkan keseragaman suatu populasi dengan populasi lainya. Statistik yang cocok sebagai dasar keputusan adalah statistik chi square (χ^2) dan statistic F.

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Varians

a. Uji hipotesis

- H0 : σ = σ0
  H1 : σ ‡ σ0
- Tingkat signifikansi : α
- Statistik uji : $\chi^2_{hitung} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
- Daerah kritis (Daerah penolakan H0)

$$\chi^2_{hitung} < \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2});(n-1)} \text{ atau } \chi^2_{hitung} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2};(n-1)}$$



- Daerah penerimaan H0

$$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2});(n-1)} \leq \chi^2_{hitung} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};(n-1)}$$

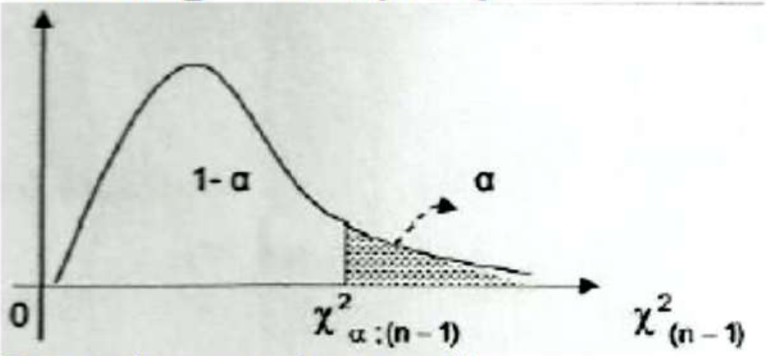
Langkah-Langkah Uji Hipotesis Varians

b. Uji hipotesis

- H0 : $\sigma = \sigma_0$

  H1 : $\sigma > \sigma_0$
- Tingkat signifikansi : α
- Statistik uji : $\chi^2_{hitung} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
- Daerah kritis (Daerah penolakan H0)

  $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha;(n-1)}$



- Daerah penerimaan H0

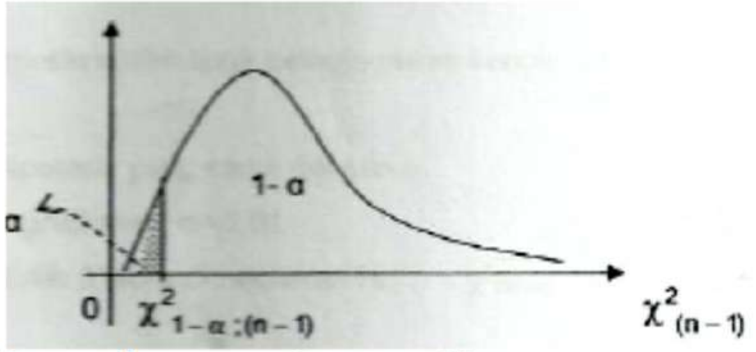
  $\chi^2_{hitung} \leq \chi^2_{\alpha;(n-1)}$

Langkah-Langkah Uji Hipotesis Varians

c. Uji hipotesis

- H0 : $\sigma = \sigma_0$
  H1 : $\sigma < \sigma_0$
- Tingkat signifikansi : α
- Statistik uji : $\chi^2_{hitung} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
- Daerah kritis (Daerah penolakan H0)

$\chi^2_{\mathbf{hitung}} < \chi^2_{(1-\alpha);(n-1)}$



- Daerah penerimaan H0

$\chi^2_{\mathbf{hitung}} \geq \chi^2_{(1-\alpha);(n-1)}$

Ilustrasi 3

Dalam kondisi normal, standard deviasi dari paket-paket produk dengan berat 40 ons yang dihasilkan suatu mesin adalah 0,25 ons. Setelah mesin berjalan beberapa waktu, diambil sampel produk sejumlah 20 paket, dari sampel tersebut diketahui standard deviasi beratnya adalah 0,32 ons. Apakah mesin tersebut masih bisa dikatakan bekerja dalam keadaan normal? Gunakan $\alpha = 0{,}05$.

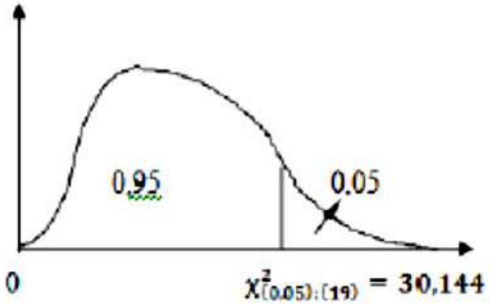
Solusi

Diketahui:

n = 20 s = 0,32 ons

Uji hipotesis

- H0 : σ = 0,25
  H1 : σ > 0,25
- Tingkat signifikansi : α = 0,05
- Statistik uji : $\chi^2_{hitung} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(19)(0{,}32^2)}{(0{,}25^2)} = 31{,}1296$
- Daerah kritis (Daerah penolakan H0)
  $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{0,05;(19)} = 30{,}144$



- Kesimpulan: karena $\chi^2_{hitung} = 31{,}1296 > \chi^2_{0,05;(19)} = 30{,}144$ maka H0 ditolak artinya mesin sudah tidak bekerja dalam kondisi normal

Rumus Matlab

Uji z (z-test)

```
[h,p] = ztest(x,mu,sigma)
```

```
[h,p] = ztest(x,mu,sigma,alpha,tail)
```

```
[h,p,ci,zval] = ztest(_______)
```

$$h = \begin{cases} 1, & tolak\ H_0\ pada\ \alpha = 5\% \\ 0, & terima\ H_1\ pada\ \alpha = 5\% \end{cases}$$

p adalah probabilitas tingkat signifikansi
ci adalah confidence interval
zval adalah nilai uji statistik

Rumus Matlab

Uji t (t-test)

```
[h,p] = ttest(x,m)
```

```
[h,p] = ttest(x,mu,sigma,alpha)
```

```
[h,p,ci,stats] = ttest(___)
```

$$h = \begin{cases} 1, & tolak\ H_0\ pada\ \alpha = 5\% \\ 0, & terima\ H_1\ pada\ \alpha = 5\% \end{cases}$$

p adalah probabilitas tingkat signifikansi
ci adalah confidence interval
stat adalah nilai uji statistik

Rumus Matlab

Uji Satu Variansi

[h,p] = vartest(x,σ^2)

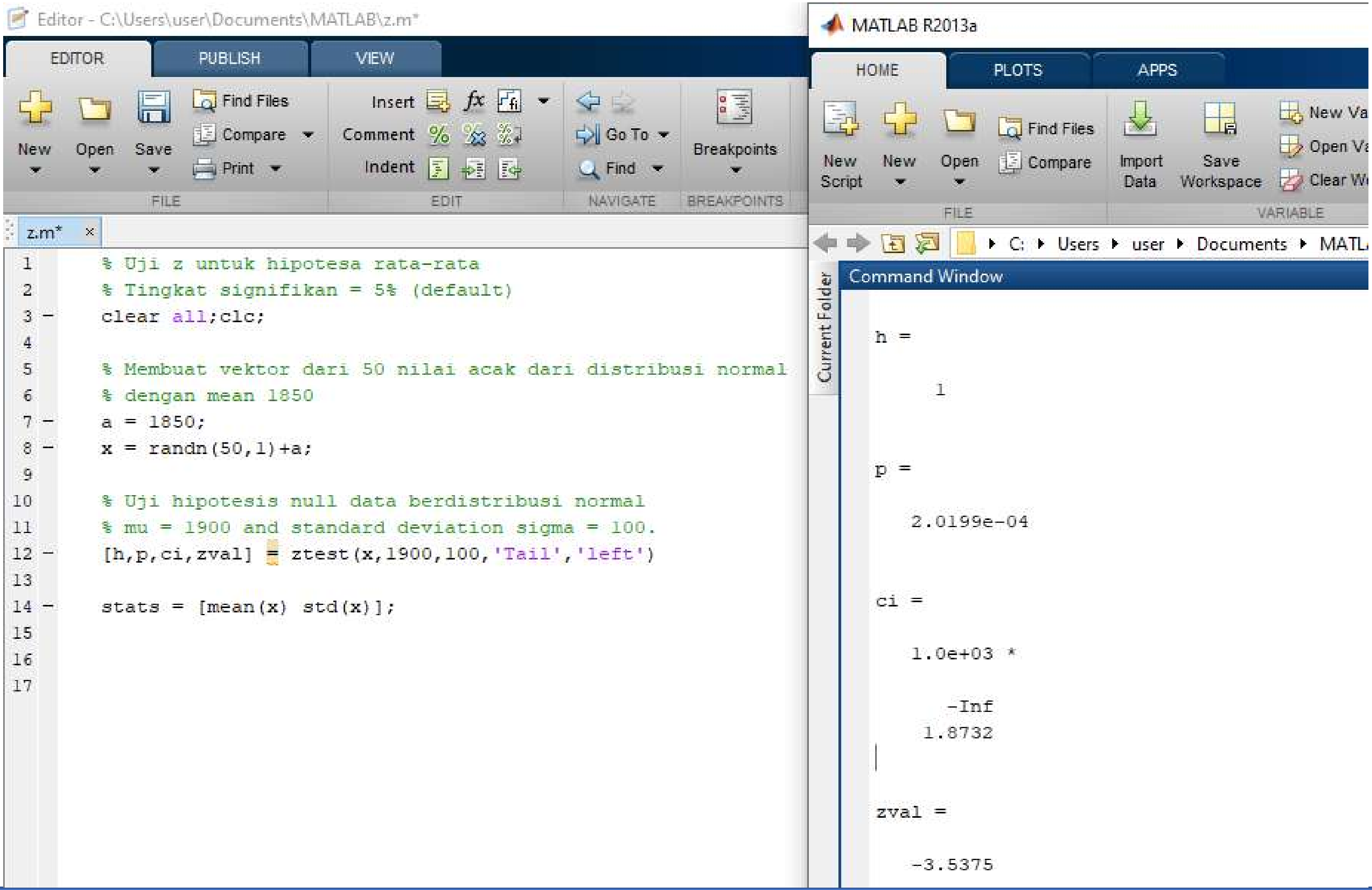
[h,p] = vartest(x,σ^2,α,tail)

$$h = \begin{cases} 1, & tolak\ H_0\ pada\ \alpha = 5\% \\ 0, & terima\ H_1\ pada\ \alpha = 5\% \end{cases}$$

p adalah probabilitas tingkat signifikansi

Perhitungan dengan Matlab

Soal kasus pada Ilustrasi 1



TERIMA KASIH